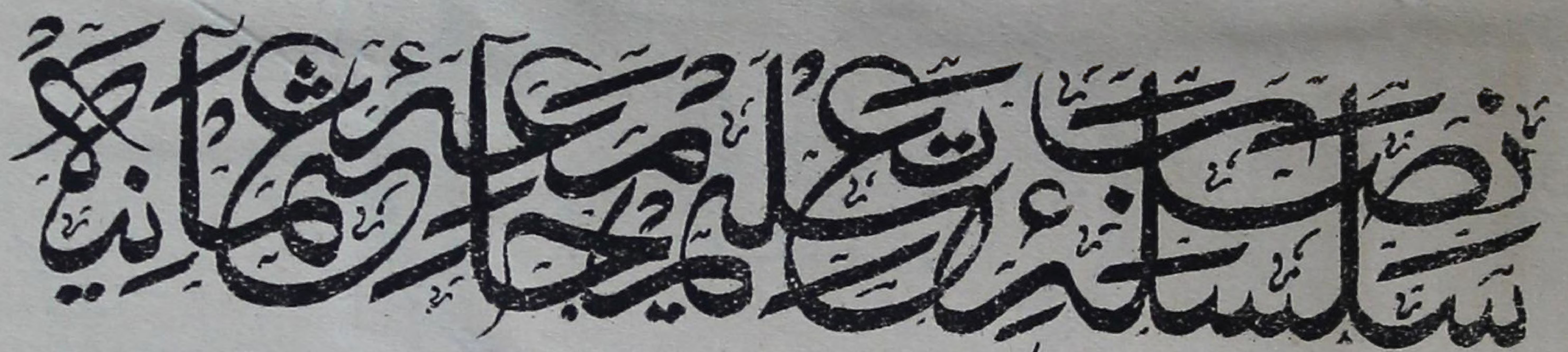


طبیعیات
حرکت



طبیعیات

حرکت

ٹکسٹ بک آف فزکس

مصنفۂ جے ڈنکن اور ایس جی۔ سٹارلنگ

برائے بی۔اے

ترجمہ

مولوی محمد نصیر احمد صاحب عثمانی۔ ایم اے۔ بی ایس سی (علیگ)

پروفیسر طبیعیات کلیہ جامعہ عثمانیہ

سنہ ۱۳۴۷ھ سنہ ۱۳۳۷ف م ۱۹۲۸ء

دار الطبع جامعہ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن


JAMMU & KASHMIR UNIVERSITY
LIBRARY
No 5303
D: 25.8.49.
SRINAGAR

فہرست مضامین

طبیعیات (حرکت)

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

حصّۂ اوّل

علمِ حرکت

پہلی فصل

تمہید

۱۔ ابتدائی تعریفیں:—

علمِ حرکت طبیعیات کی وہ شاخ ہے جس میں مادّہ کی کیفیت سے بحث کی جاتی ہے جبکہ اُس پر قوت کا عمل ہوتا ہے۔

یہاں پر صرف اِتنا بیان کر دینا کافی ہوگا کہ ہمیں مادّے کے متعلق معلومات محض اُس کے خواص کے ذریعہ حاصل ہوئے ہیں جن میں سب سے زیادہ بدیہی خواص یہ ہیں:۔

(۱) مادّہ کو ہمیشہ مکان کی ضرورت ہوا کرتی ہے۔

(۲) زمین کے قرب و جوار میں مادّہ میں ہمیشہ وزن ہوتا ہے۔

جسم مادّہ کے ایک معیّن حصّہ کا نام ہے۔

کسی جسم پر جب کوئی دباؤ یا کھینچ عمل کرے تو اُس کو قوت کہتے ہیں۔ جسم کی حرکت کو وہ قوت اِس طرح بدل سکتی ہے کہ یا تو اُس کی چال کو بالتواتر بڑھائے یا گھٹائے اور یا حرکت کی سمت میں ایک متواتر

تبدیلی پیدا کر دے۔ ہم نے قوت کا جو سب سے پہلا مفہوم قائم کیا وہ اس اعصابی کوشش کی بناء پر تھا جو ہم کو کسی جسم کے وزن سنبھالنے میں کرنا پڑتی ہے۔

سکونیات طبیعیات کی وہ شاخ ہے جس میں ایسی حالتوں کا ذکر ہوتا ہے جن میں کسی جسم پر عمل کرنے والی قوتیں اس کی حرکت میں تبدیلی پیدا نہیں کرتیں۔

حرکیات تمام اُن مسائل پر حاوی ہے جن میں قوت کے عمل سے جسم کی حرکت تبدیل ہوتی ہے۔

ایک دوسری شاخ **حرکنیات**[1] ہے جس میں حرکت کے صرف ہندسہ سے بحث ہوتی ہے لیکن قوتِ عاملہ سے کچھ غرض نہیں ہوتی۔

ایک دوسرا تسمیہ بھی رائج ہے جس کی رُو سے اِس کُل مضمون کو **علمِ حِیَل** کہتے ہیں۔ اور **علمِ حرکت** سے مُراد اُس شاخ سے ہے جس میں عاملہ قوتیں جسم کی حرکت میں تبدیلی پیدا کر دیتی ہیں۔ اِس تسمیہ میں سکونیات و **حرکنیات** کے وہی معنی ہیں جو اُوپر بیان ہوئے۔

بُنیادی اِکائیاں :-

وہ بنیادی اِکائیاں جن کی اضافت سے کسی علمی نظام کی تمام پیمائشیں کی جاتی ہیں تین ہیں یعنی **طول**، **کمیت** اور **وقت** کی اِکائیاں۔ اِن اِکائیوں کے دو مشہور و مروّج نظام ہیں۔ ایک میتری نظام دُوسرا انگریزی۔ تمام علمی پیمائشیں پہلے نظام کے مطابق عمل میں آتی ہیں۔ طول کی میتری اِکائی میتر ہے۔ **میتر** کی تعریف یہ ہے کہ پیرس میں رکھی ہوئی ایک معیاری سلاخ کے دونوں کناروں

[1] حرکنیات = حرکت + ہندسہ + یات۔

کے درمیان کا فاصلہ خاص شرائط کے ساتھ میٹر کہلاتا ہے۔ دیگر علمی اکائیاں یہ ہیں :۔

سنتی میٹر (۰۱، میٹر۔ تحریر میں اسمر)، ملی میٹر (۰۰۱، میٹر تحریر میں امر)، کلو میٹر (۱۰۰۰ میٹر)۔

طول کی انگریزی اکائی **فٹ** ہے۔ جو ایک معیاری گز کا ایک ثلث ہوتا ہے۔ لندن میں رکھی ہوئی ایک معیاری سلاخ پر دو نشانوں کے درمیان کا فاصلہ گز کہلاتا ہے۔ انچ (ایک فٹ کا بارھواں حصہ)، اور میل (۵۲۸۰ فٹ) دوسری علمی اکائیاں ہیں۔ ایک انچ ۲،۵۳۹ سمر کے مساوی ہے اور ایک میٹر ۳۹،۳۷ انچ کے مساوی ہوتا ہے۔ نقشہ کشی میں ابعاد کے دکھلانے میں سہولت کی غرض سے ۲ فٹ ۵ انچ کے سے طول کتابت میں ۲' ۵" لکھے جاتے ہیں۔ رقبہ کی پیمائش کے لئے اکائیاں اِن مربعوں سے حاصل ہوئی ہیں جن کے ضلعے مذکورۂ بالا طول کی اکائیوں کے مساوی ہوتے ہیں۔ رقبہ کی اکائیوں کو مربع سنتی میٹر، مربع انچ وغیرہ کہتے ہیں۔

حجم کی پیمائش میں اکائیاں اُن مکعبوں سے حاصل ہوتی ہیں جن کے ضلعے کسی طولی اکائی کے مساوی ہوں۔ یہ اکائیاں مکعب سنتی میٹر (کتابت میں مکعب سمر)، ایک مکعب انچ وغیرہ کہلاتی ہیں۔ حجم کی دوسری اکائیاں **لیٹر** (۱۰۰۰ مکعب سمر = ۱،۷۶۲ پینٹ)، **گیلن** (۱۶۰۵ ،۰ مکعب فٹ یا ۸ پینٹ یا ۴،۵۴۱ لیٹر) اور **پنٹ** ہیں۔

کمیت سے مُراد مقدارِ مادہ ہے۔ کمیت کی میٹری اکائی اُس مقدارِ مادہ سے مُراد لی گئی تھی جو ایک مکعب سنتی میٹر خالص پانی میں ۴° م کی تپش پر ہو۔ لیکن فی الحقیقت وہ پیرس میں رکھے ہوئے پلاٹینم کے ایک ڈلے کی کمیت کا ہزارواں حصہ ہے۔ اس اکائی کو ایک گرام کہتے ہیں۔ ایک دوسری اکائی جو عام طور پر مستعمل ہے

کلوگرام (۱۰۰۰ گرام) ہے۔ کمیت کی انگریزی اکائی ایک پونڈ ہے۔ اِس سے مُراد لندن میں رکھے ہوئے ایک پلاٹینم کے معیاری ڈلے کی مقدارِ مادّہ ہے۔ بسا اوقات ٹن (۲۲۴۰ پونڈ) بھی استعمال ہوتا ہے۔ میٹھے پانی کے ایک گیلن میں تقریباً ۱۰ پونڈ کی کمیت ہوتی ہے۔ ایک پونڈ ۶ر۴۵۳ گرام کے مساوی ہوتا ہے۔

تمام علمی نظاموں میں وقت کی اکائی ایک ثانیہ ہے جو اوسط شمسی روز یعنی زمین کی سطح پر کسی مقام کے معدل النہار سے شورج کے دو مسلسل مُرور کے درمیان اوسط وقت، سے ماخوذ ہے۔

یہ امر قابلِ لحاظ ہے کہ جب طول، کمیت، وقت کی اکائیاں کسی علمی پیمائش کے نظام کے لئے بیان کر دی جاتی ہیں تو ان میں پھر کسی قسم کا تغیر نہیں ہوتا۔ چونکہ روزمرہ کے استعمال میں میتری اکائیاں سنتی میتر، گرام اور ثانیہ ہیں اِس لئے بجائے میتری نظام کے اِس کو نظام س گ ث سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

کثافت :-

کسی شَے کی کثافت سے مُراد اُس شَے کی اکائی حجم کی کمیت ہے۔ س گ ث نظام میں کثافت کی پیمائش گرام فی مکعب سنتی میتر میں کی جاتی ہے۔ اور انگریزی نظام میں پونڈ فی مکعب فٹ یا فی مکعب انچ میں۔

فرض کرو　ح = کسی جسم کا حجم

ک = جسم کی کثافت

و = جسم کی کمیت

تو　و = ک ح

یا　$ک = \frac{و}{ح}$

عام اشیاء کی اوسط کثافتیں

شے	کثافت		شے	کثافت	
	گرام فی مکعب سمر	پونڈ فی مکعب فٹ		گرام فی مکعب سمر	پونڈ فی مکعب فٹ
ایلومینیئم	۲٫۶۵	۱۶۴	کاگ	۰٫۲۴	۱۵
پیتل	۸٫۶	۵۳۵	آبنوس	۱٫۲	۳۷٫۵
تانبا	۸٫۹۳	۵۵۵	شاہ بلوط	۰٫۸	۵۰
سونا	۱۹٫۳۲	۱۲۰۰	سنگِ مرمر	۲٫۶	۱۶۲
چاندی	۱۰٫۵	۶۵۵	شیشہ ۔ چقماق	۳٫۷	۲۳۰
فولاد	۷٫۸	۴۸۰	چمڑا	۰٫۹	۵۶

کسی مقدار کے ابعاد :-

کسی طبیعیاتی مقدار کے **ابعاد** بُنیادی اکائیوں کی ضعافت سے ظاہر کئے جا سکتے ہیں۔ اگر ہم طول، کمیت، اور وقت کو فرداً فرداً ط، کہ، ت سے ظاہر کریں تو رقبہ، حجم، اور کثافت کے ابعاد فرداً فرداً $ط^{۲}$، $ط^{۳}$ اور $\frac{کہ}{ط^{۳}}$ ہونگے۔

مثال :- فرض کرو کہ کسی نتیجہ کے نکالنے میں آخری حساب کی صورت حسبِ ذیل ہے :-

$$\frac{۱۲\,(گرام) \times ۳\,(سمر) \times ۳\,(سمر)}{۶\,(سمر) \times ۲\,(ثانیہ) \times ۲\,(ثانیہ)}$$

عددی نتیجہ ۵٫۴ ہے۔ ابعاد حاصل کرنے کے لئے شمار کنندہ اور نسب نما میں سے مشترک خطوط بند مقداریں کاٹ دو تو

$\frac{\text{گرام} \times \text{سمر}}{\text{ثانیہ} \times \text{ثانیہ}}$ یا $\frac{\text{کہ} \times \text{ل}}{\text{ت} \times \text{ت}}$ یا $\frac{\text{کہ ل}}{\text{ت}^2}$ حاصل ہوگا۔ آگے چل کر معلوم ہوگا کہ یہ نتیجہ قوت کو ظاہر کرتا ہے۔

تجاذب :—

ہر ایک جسم میں کسی دُوسرے جسم کی طرف حرکت کرنے کا ایک عام میلان پایا جاتا ہے۔ مادّہ کا ہر ذرّہ دُوسرے ذرّہ کو اپنی طرف ایسی قوت سے کھینچتا ہے جو ذرّوں کے درمیانی خط کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ جب جسم چھوٹے یا اوسط جسامت کے ہوتے ہیں تو اُن کے درمیان قوتِ کشش بہت کم ہوتی ہے لیکن جب اِن میں سے ایک یا دونوں جسم بڑے ہوں تو یہ قوت بغیر نازک آلات استعمال کئے ہوئے بھی ظاہر ہو جاتی ہے۔ جس چیز کو ہم کسی جسم کا **وزن** کہتے ہیں وہ درحقیقت جسم پر زمین کی قوتِ کشش ہے جس سے وہ جسم کو اپنے مرکز کی جانب کھینچتی ہے۔ اِس ہمہ گیر کشش کو اصطلاح میں **تجاذب** کہتے ہیں۔

تجاذب دُور دراز فاصلوں پر بھی اپنا اثر دکھاتا ہے۔ چنانچہ زمین پر سُورج کی جو کشش ہے اُس کی وجہ سے زمین سورج کے گرد ایک مدار میں گھُومتی ہے۔ دو چھوٹے جسموں کے درمیان قوتِ کشش اُن کی کمیتوں کے حاصلِ ضرب کے راست متناسب، اور درمیانی فاصلہ کے مربع کے بالعکس تناسب ہوتی ہے۔ جبری ارقام میں

$$\text{ق} \propto \frac{\text{کہ}_1 \text{کہ}_2}{\text{ف}^2}$$

جہاں ق قوت ہے، کہ۱، کہ۲ جسموں کی کمیتیں، اور ف اُن کا درمیانی فاصلہ ہے۔ ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{ق} = \text{م} \frac{\text{کہ}_1 \text{کہ}_2}{\text{ف}^2}$$

جس میں م ایک عددی مستقل ہے جس کو **مستقل تجاذب** کہتے ہیں۔ س گ ث اکائیوں[۱] میں م کی قیمت ۶۵ء۶ × ۱۰^-۸ ہے - اِس لئے ڈائن میں (صفحہ ۹و۱۰۸)۔

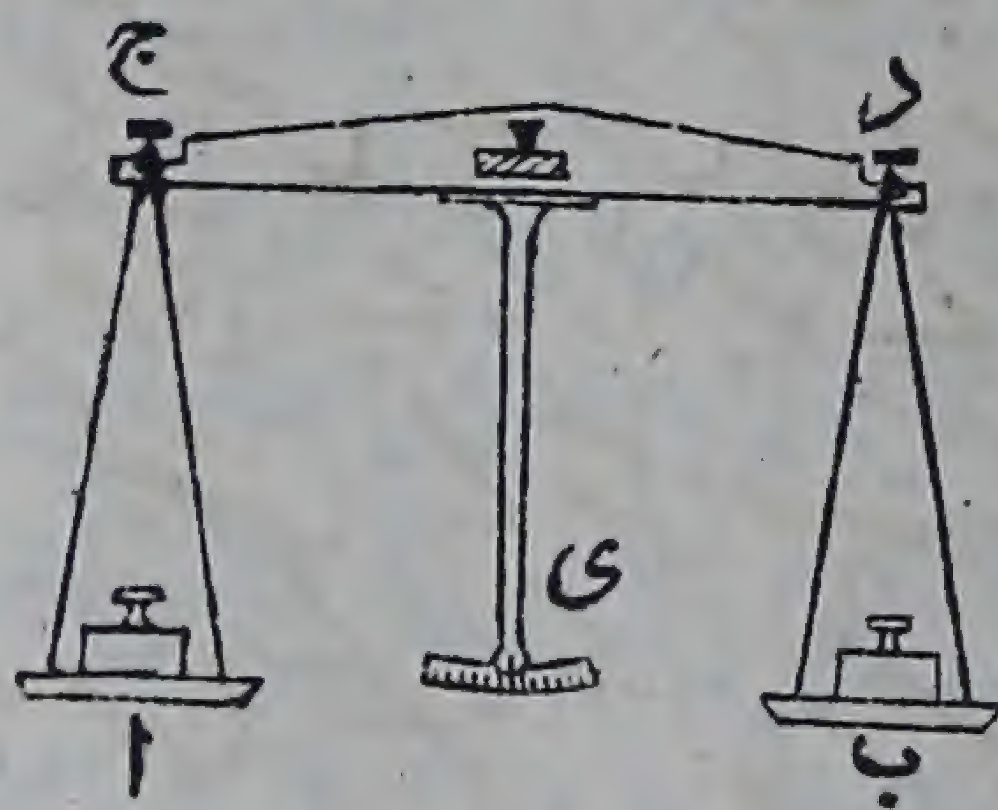
$$ق = ۶۵ء۶ \times ۱۰^{-۸} \frac{کہ_۱ کہ_۲}{ف^۲} ڈائن$$

وزن :—

کسی جسم کا وزن ایک حد تک تغیر پذیر ہے۔ اِس کا اِنحصار مقامِ مشاہدہ کے عرض البلد اور نیز سطح زمین سے اُوپر یا نیچے کی طرف جسم کے فاصلہ پر منحصر ہے۔ وزن کی سمت ہمیشہ نیچے کی جانب اِنتصاباً ہوتی ہے۔

ایک ہی مقام پر رکھی ہوئی مساوی کمیتوں کا وزن مساوی ہوتا ہے :—

اِس واقعہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک معمولی ترازو (شکل ۷۔۱) کے ذریعہ سے ہم ایک ایسا جسم حاصل کر سکتے ہیں



شکل ۷۔۱۔ معمولی ترازو

[۱] حسب نتیجہ سی۔ وی بائیز۔ دیکھو رُوئداد رائل سوسائٹی لندن ۱۸۹۴ء۔ زمین کی اوسط کثافت دریافت کی گئی ہے۔ بائیز (Boys) نے اِس کی قیمت ۵۲۷ء۵ بتائی یعنی پانی سے تقریباً ۵½ گنا بھاری۔

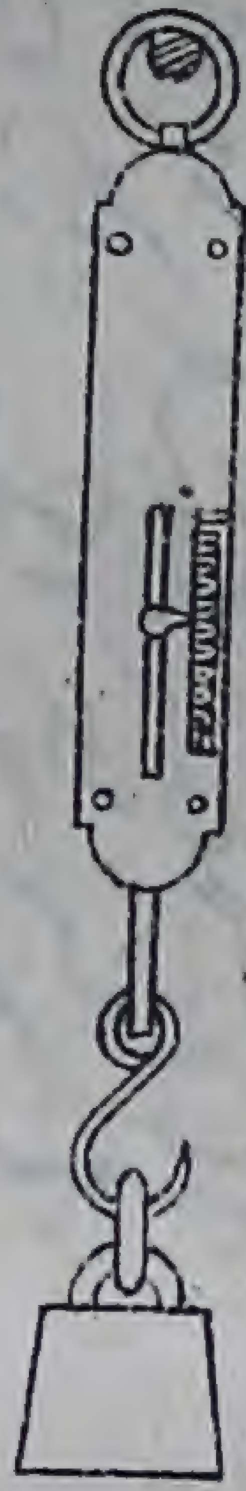
جس کی کمیت کسی معیاری کمیت کے مساوی ہو۔ معیاری کمیت کو پلڑے ا میں رکھتے ہیں۔ اور پلڑے ب سے حسب منشا شے کو نکالتے یا اُس میں رکھتے ہیں۔ یہاں تک کہ ا اور ب پر عمل کرنے والے وزن برابر ہو جائیں جس کا اظہار ڈنڈی ج د کے متوازی الافق ہو جانے سے ہوتا ہے یا اُس کے ارتعاش سے جس میں ڈنڈی اُفقی خط کے اُوپر یا نیچے مساوی زاویئے طے کرتی ہے۔ ایسی صورت میں ا پر کی کمیت ب والی کمیت کے مساوی ہوگی۔ ایسی ترازو کے استعمال میں سہولت کی غرض سے ایک انتصابی نمائندہ ڈنڈی میں لگا دیتے ہیں جو ایک درجہ دار پیمانہ کے سامنے اہتزاز کرتا ہے۔ اگر ترازو صحیح طور پر درست ہے تو وزن اُس وقت مساوی ہونگے جبکہ نمائندہ وسطی نشان کے ہر دو جانب مساوی زاویئے طے کرے۔

اکثر معملوں میں معیاری کمیتیں اکلو گرام سے لے کر ۰۰۱ء گرام تک اور ا پونڈ سے ۰۰۱ء پونڈ تک مہیا کی جاتی ہیں۔ اِن کو عموماً (سازِ) اوزان کہتے ہیں۔ اِن کے استعمال میں جو عمل کرنا پڑتا ہے اُس کو وزن کرنا کہتے ہیں۔

قوت کی اِکائیاں :—

بہت سے عملی اغراض کی وجہ سے ایک اکائی کمیت کے وزن کو قوت کی اِکائی مانتے ہیں۔ جیسا پیشتر ذکر ہو چکا ہے یہ وزن تغیر پذیر ہے۔ اِس لئے یہ اِکائی صحیح طور پر علمی اِکائی نہیں ہے جس قوت کی اِکائی کی بنیاد وزن پر ہو اُس کو قوت کی تجاذبی اِکائی کہتے ہیں۔ س گ ث اور انگریزی نظام میں قوت کی تجاذبی اِکائیاں فرداً فرداً ایک گرام کمیت کا وزن، کتابت میں ایک گرام وزن، اور ایک پونڈ کمیت کا وزن، کتابت میں ا پونڈ وزن ہیں۔ کِلو گرام وزن اور ٹن وزن قوت کی دُوسری تجاذبی اِکائیاں ہیں۔

کسی جسم کے وزن میں تغیر دکھلانے کے لئے ایک معمولی ترازو نہیں استعمال کی جاسکتی۔ اِس مقصد کے لئے کافی طور سے نازک بنی ہوئی کمانیدار ترازو (شکل ۲) استعمال کی جاتی ہے۔



شکل ۲۔ کمانیدار ترازو۔

یہ معلوم ہے کہ ایک مرغولہ کمانی جس قوت سے کھینچی جاتی ہے اُسی کی مناسبت سے وہ گھٹتی بڑھتی ہے۔ کمانیدار ترازو میں اِسی خاصہ سے فائدہ اُٹھایا گیا ہے جس شئے کو وزن کرنا ہو اُس کو کمانی سے لٹکا دیتے ہیں۔ کمانی کا کھنچاؤ ایک نمائندہ سے ظاہر ہوتا ہے جو ایک درجہ دار پیمانہ پر حرکت کرتا ہے۔ سہولت کی غرض سے پیمانہ گرام یا پونڈ وزن میں تقسیم کر دیا جاتا ہے تاکہ وزن راست معلوم ہو سکے۔ ایسی ترازو اُس مقام پر جہاں کہ پیمانہ پر درجے بنائے گئے تھے صحیح وزن تبلائیگی۔ لیکن اگر کسی دوسرے مختلف عرض البلد میں وہی جسم کمانی سے لٹکایا جائے تو ترازو ایک دوسرا وزن بتلائیگی۔ یہ امر قابلِ لحاظ ہے کہ رُوئے زمین پر وزن کا تغیر بہت کم ہوتا ہے۔

قوت کی مطلق اِکائیاں چونکہ طول، کمیت، اور وقت کی بنیادی اکائیوں پر مبنی ہیں اس لئے غیر متغیر ہیں کسی نظام میں قوت کی مطلق اِکائی وہ قوت ہے جو اگر سکون کی حالت میں ایک اِکائی کمیت والے جسم پر ایک ثانیہ تک عمل کرے تو اُس میں ایک اِکائی طول فی ثانیہ کی رفتار پیدا کر دے۔ س گ ث میں قوت کی مطلق اکائیاں ڈائن (Dyne) ہے۔ ایک ڈائن اگر ایک گرام کمیت پر

ایک ثانیہ تک عمل کرے تو اِس میں ایک سمر فی ثانیہ کی رفتار پیدا کر دیگی۔ انگریزی نظام میں قوت کی مطلق اکائی ایک پاؤنڈل (Poundal) ہے جو اگر ایک پونڈ کمیت پر ایک ثانیہ تک عمل کرے تو اِس میں ایک فٹ فی ثانیہ کی رفتار پیدا کر دیگا۔ اِن اکائیوں کا ذکر بعد میں کیا جائیگا اور پھر مزید تشریح کی جائیگی۔

ریاضیاتی ضوابط :—

حوالہ کی غرض سے ذیل میں ریاضیاتی ضوابط درج کئے جاتے ہیں۔ یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ طالب علم ان کے بنیادی اصولوں کو پڑھ چکا ہے یا یہ کہ اب طبیعیات کے ساتھ ساتھ پڑھ رہا ہے۔

مساحت

رقبوں کی دریافت :—

مربع، ضلع س، رقبہ = س^2

مستطیل، متصل ضلعے ا، ب، رقبہ = ا ب

مثلث، قاعدہ ب، ارتفاع عمودی ا، رقبہ = $\frac{1}{2}$ ا ب

مثلث، ہر سہ ضلعے ا، ب، ج، س = $\frac{(ا + ب + ج)}{2}$

رقبہ = $\sqrt{س (س - ا) (س - ب) (س - ج)}$

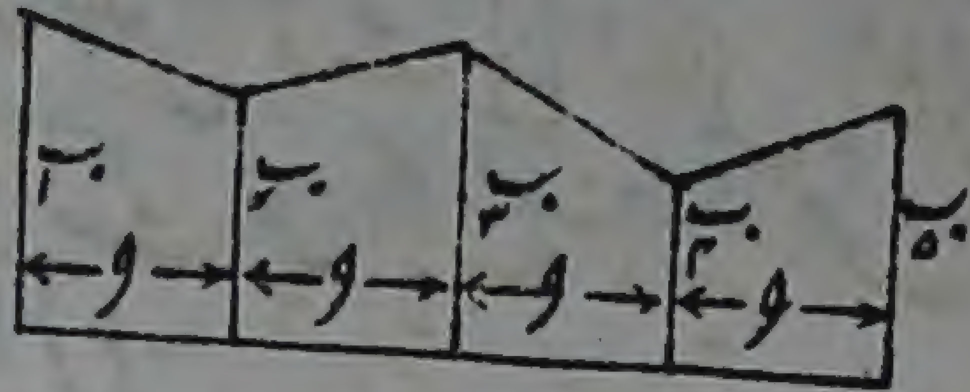
متوازی الاضلاع، رقبہ = (ایک ضلع) × (اس ضلع سے مقابل کے ضلع تک کا عمودی فاصلہ)

کوئی بے قاعدہ خطوطِ مستقیم سے گھری ہوئی شکل :۔ اِس کو مثلثوں میں تقسیم کر کے ہر مثلث کا فرداً فرداً رقبہ نکالو اور مجموعہ حاصل کرو۔

منحرف، رقبہ = کنارے کے معینوں کا نصف مجموعہ × قاعدہ۔

انحرافی شکل جس میں وقفے مساوی ہوں (شکل ۳)۔

رقبہ = ا ((ب۱ + ب۵)/۲ + ب۲ + ب۳ + ب۴)

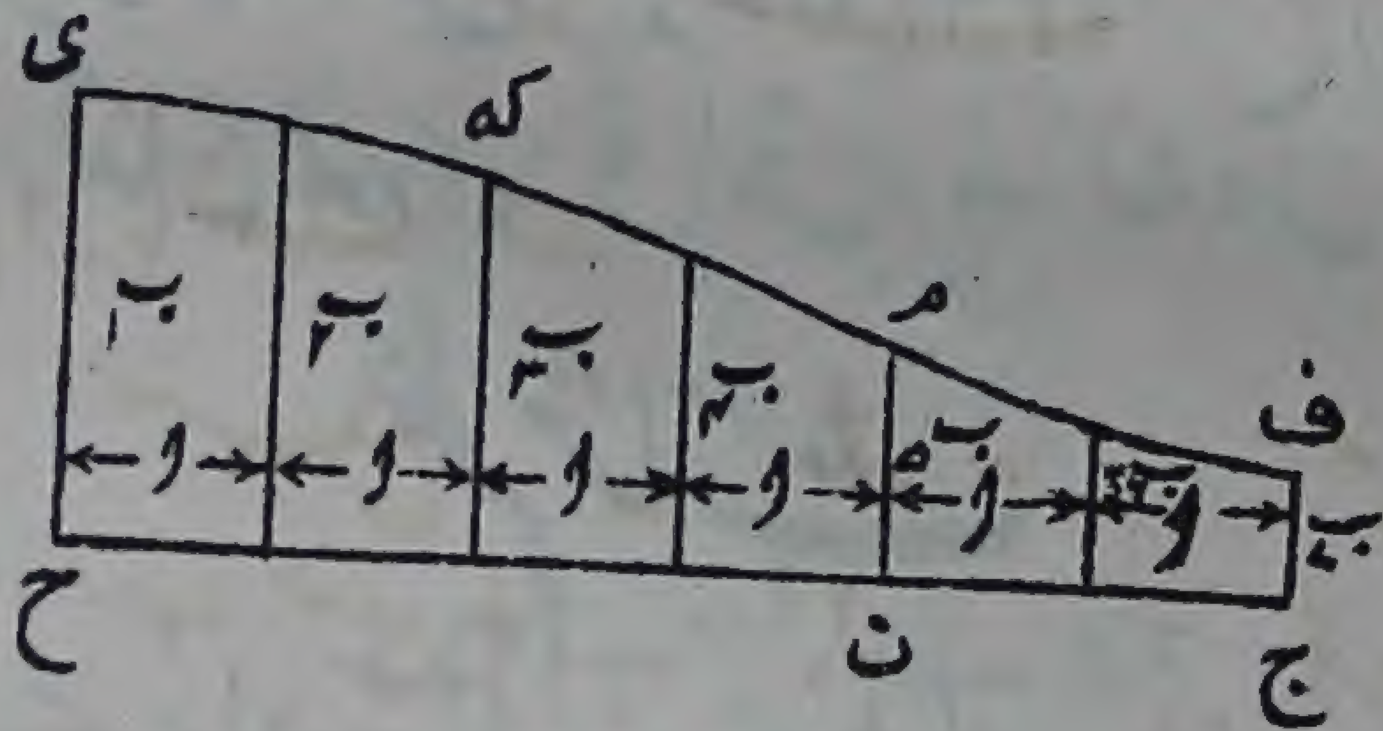


شکل ۳

کسی منحنی سے محدود رقبہ کے لئے سمپسن[1] کا قاعدہ :—

مساوی فاصلوں پر طاق (مثلاً ۷) معین لو تو

رقبہ = و/۳ (ب۱ + ۴ب۲ + ۲ب۳ + ۴ب۴ + ۲ب۵ + ۴ب۶ + ب۷)



شکل ۴۔ سمپسن کے قاعدہ کی تشریح

دائرہ :- نصف قطر ن، قطر ق، رقبہ = π ن۲ = π ق۲/۴
(محیط = ۲π ن = π ق)-

قطع مکافی :- راس ر، پر (شکل ۵)، رقبہ س د ر = ۲/۳ ا ب

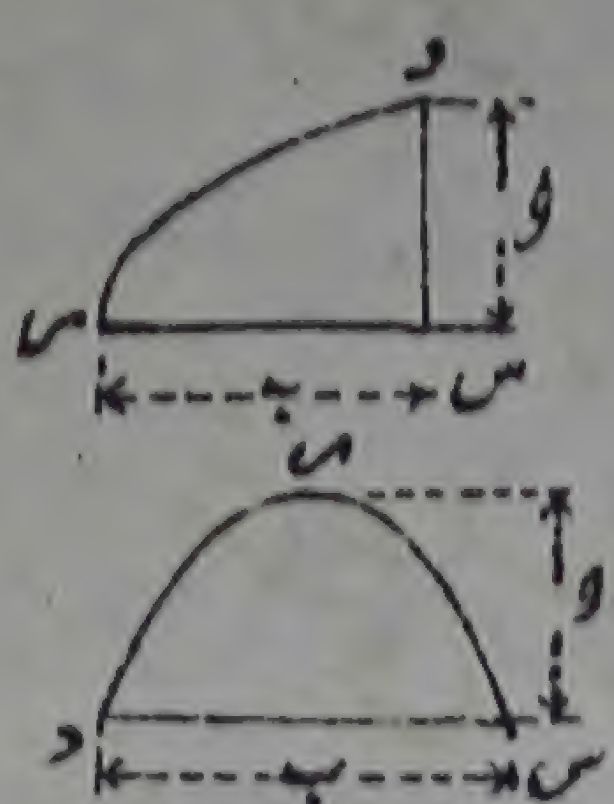
اُستوانہ :- قطر ق، طول ط، سطح منحنی کا رقبہ = π ق ط

[1] Simpson

کرہ :- قطر ق، نصف قطر ن،

سطح منحنی کا رقبہ = π ق^{2} = ۴π ن^{2} -

مخروط :- سطح منحنی کا رقبہ = قاعدہ کا محیط × $\frac{1}{2}$ ارتفاع مائل -



شکل ۵ - قطع مکافی کا رقبہ

حجموں کی دریافت :-

مکعب، ضلع ق، حجم = ق^{3}

اُسطوانہ یا منشور، جکے کنارے محور کے علی القوائم ہوں، حجم = ایک کنارے کا رقبہ × اُسطوانہ یا منشور کا طول -

کرہ، نصف قطر ن، حجم = $\frac{4}{3}$ π ن^{3}

مخروط یا ھرم، حجم = قاعدہ کا رقبہ × $\frac{1}{3}$ ارتفاعِ عمودی

مخروطِ ناقص، حجم = ۰٫۲۶۱۸ ح (ق$_{1}^{2}$ + ق$_{2}^{2}$ + ق$_{1}$ق$_{2}$)

جہاں ح = ارتفاع عمودی، ق$_{1}$، ق$_{2}$ = کناروں کے قطر -

علم مثلث

درجہ سے مُراد وہ زاویہ ہے جو کسی دائرہ کے مرکز پر ایک ایسی قوس سے بنے جو محیط کا $\frac{1}{360}$ ہو - درجہ کا ساٹھواں حصّہ دقیقہ کہلاتا ہے، اور دقیقہ کا ساٹھواں حصّہ ثانیہ ہوتا ہے - ۴۲ درجہ ۳۵ دقیقہ، ۱۲ ثانیہ کے زاویہ کو کتابت میں ۴۲° ۳۵′ ۱۲″ لکھتے ہیں -

نیمقطری سے مُراد وہ زاویہ ہے جو کسی دائرہ کے مرکز پر نصف قطر کے مساوی قوس سے بنے -

پُورے دائرہ میں ۲ π نیمقطری ہوتے ہیں، پس

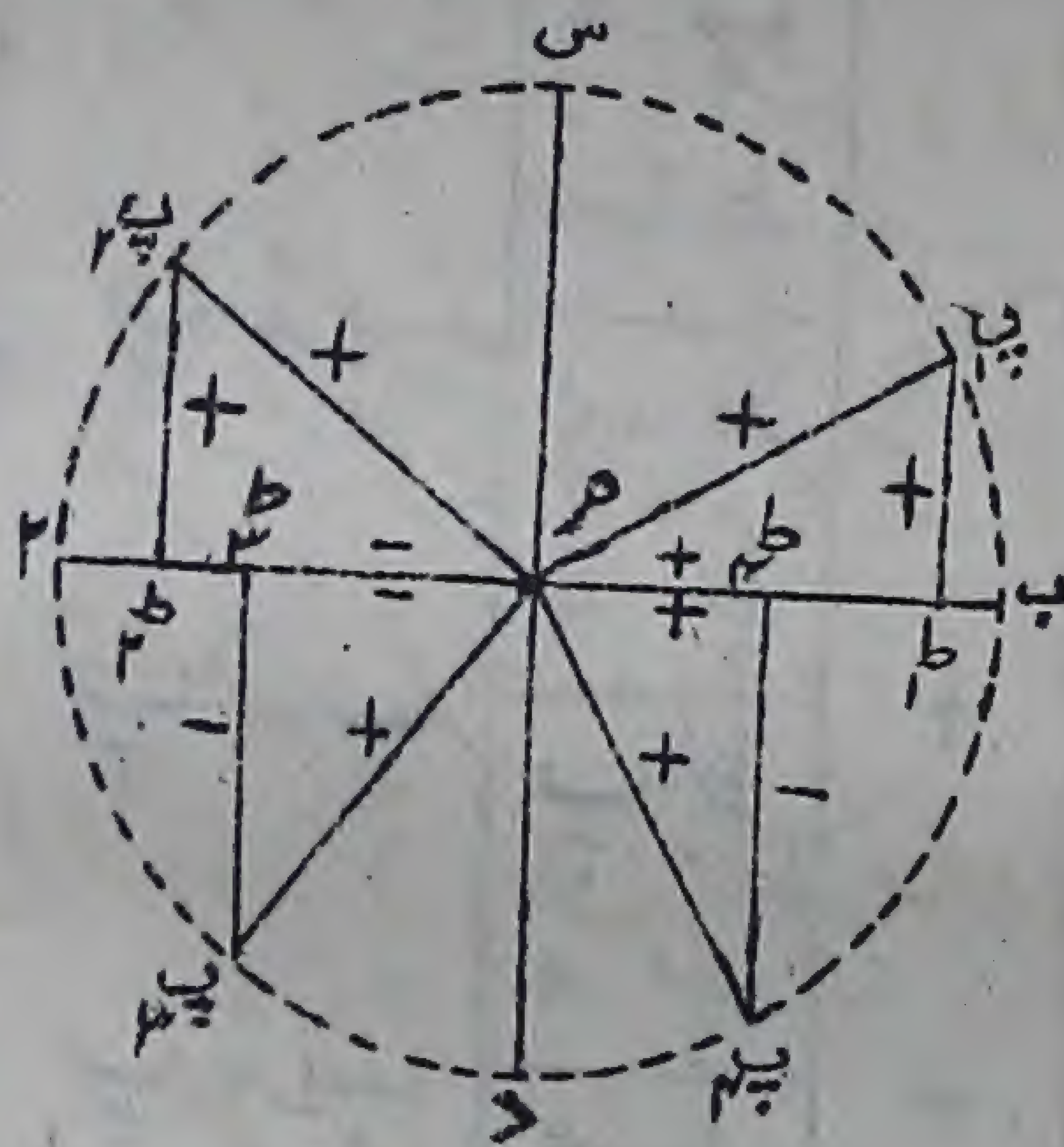
۲ π نیمقطری = ۳۶۰ درجہ

π 〃 = ۱۸۰ 〃

فرض کرو   ل = کسی زاویہ کے سامنے کا قوس
ن = دائرہ کا نصف قطر
تو زاویہ = $\frac{ل}{ن}$ نیمقطری

مثلثی نسبتیں :-

شکل ۶ میں فرض کرو کہ ھ ب خلاف سمت ساعت ھ کے گرد گردش کرتا ہے، اور فرض کرو کہ وہ علی الترتیب وضعات



شکل ۶۔ مثلثی نسبتیں

ھ پ۱، ھ پ۲، ھ پ۳، ھ پ۴ اختیار کرتا ہے۔ اب، ھ ب سے جو زاویئے بنتے ہیں اُن کی کیفیت حسب ذیل ہے :-

پ۱ ھ ب ربع اول س ھ ب میں واقع ہے۔
پ۲ ھ ب " دوم س ھ ا " " "
پ۳ ھ ب (زائد از ۱۸۰°) ربع سوم ا ھ د میں واقع ہے۔
پ۴ ھ ب (زائد از ۲۷۰°) " چہارم ب ھ د " " "

ا ب پر پ کی ہر وضع سے عمود پ ط گراؤ۔ ھ ب ہمیشہ مثبت مانا جاتا ہے، ھ ط اگر ھ کے دائیں جانب ہے تو مثبت ہے اور بائیں جانب ہو تو منفی ہے۔ پ ط اگر ا ب کے

اُوپر ہو تو مثبت ہے اور اگر نیچے تو منفی۔

نسبت کا نام	کتابتِ نسبت	نسبت کی قیمت	نسبت کی جبری علامت			
			ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چہارم
جیب پ مذب	جب پ مذب	پ ط / م پ	+	+	−	−
جیب التمام پ مذب	جم پ مذب	م ط / م پ	+	−	−	+
مماس پ مذب	مس پ مذب	پ ط / م ط	+	−	+	−
مماس التمام پ مذب	مم پ مذب	م ط / پ ط	+	−	+	−
قاطع پ مذب	قط پ مذب	م پ / م ط	+	−	−	+
قاطع التمام پ مذب	قم پ مذب	م ط / پ ط	+	+	−	−

نصف قطر م پ کے طول کا اثر نسبتوں کی قیمتوں پر نہیں پڑتا۔

ذیل کے ضابطے سہولت کی غرض سے درج کئے جاتے ہیں:-

قم ا = ۱ / جب ا ، قط ا = ۱ / جم ا ، مم ا = ۱ / مس ا

مس ا = جب ا / جم ا ، مم ا = جم ا / جب ا ، جم² ا + جب² ا = ۱

جب ا = جم (۹۰° - ا)، جب ا = جب (۱۸۰° - ا)

جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

مس (ا + ب) = (مس ا + مس ب) / (۱ - مس ا مس ب)

مس (ا - ب) = (مس ا - مس ب) / (۱ + مس ا مس ب)

اگر کسی مثلث کے زاویے ا، ب، س، ہوں اور اُن کے مقابل کے ضلعے علی الترتیب اَ، بَ، سَ، ہوں تو ذیل کے علاقے صحیح ہوتے ہیں:-

اَ = بَ جم س + سَ جم ب

اَ / جب ا = بَ / جب ب = سَ / جب س

$\text{اَ}^{۲}$ = $\text{بَ}^{۲}$ + $\text{سَ}^{۲}$ - ۲ بَ سَ جم ا

پہلی فصل کی مشقیں

۱- اگر ایک میٹر = ۳۹٫۳۷ اِنچ تو میلوں کو کِلو میٹر بنانے کے لئے جزوِ تحویلی دریافت کرو، اور اِس جُزء کی مدد سے ۳ میل ۱۵ جریب کو کلو میٹروں میں تحویل کرو۔

۲- ۲٫۹۴ میٹر کو فٹ اور اِنچوں میں تحویل کرو۔

۳- ایک ایسا مثلث کھینچو جس کے ضلعے علی الترتیب ۴½، ۳¼، ۵⅜، اِنچ ہوں۔ اِس کے عمودی ارتفاع کی پیمائش کرو۔ قاعدہ

کے طول اور ارتفاع کی مدد سے رقبہ دریافت کرو۔ اپنے نتیجہ کی تصدیق ذیل کے ضابطہ سے کرو:-

$\sqrt{م(م-ل)(م-ب)(م-س)}$

۴- لوہے کی ایک گول تختی کا قطر ۱۴ سمر ہے۔ اس کا رقبہ دریافت کرو اگر π = ۲۲/۷۔ اگر لوہے کا وزن ۱۰ر کلوگرام فی مربع میٹر ہو تو تختی کا وزن معلوم کرو۔

۵- ایک گولے کا حجم معلوم کرو جس کا قطر ۹ انچ ہے۔ اگر اس کے مادّہ کی کثافت ۴۵۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہو تو گولے کا وزن پونڈوں میں دریافت کرو۔

۶- کسی دیوار کی تراش انحرافی ہے۔ اور دیوار کا ایک رُخ انتصابی ہے۔ دیوار کی بلندی ۲۰ فٹ، چوٹی پر موٹائی ۴ فٹ، قاعدہ پر موٹائی ۹ فٹ ہے۔ دیوار کا وزن ۱۵۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہے۔ تو دیوار کے ایک فٹ لمبے حصّے کا وزن کیا ہوگا۔

۷- کسی انحرافی شکل میں دس دس سمر کے فاصلے سے ذیل کے سمین کھینچے گئے ہیں:-

۱۰۰، ۱۴۰، ۱۲۰، ۸۰، ۰ تو مربع سمر میں کُل رقبہ دریافت کرو۔

۸- کسی قاعدہ ل = ۶۰ فٹ پر ایک مکافی مُنحنی کھینچو۔ قاعدے کے ایک کنارے سے فاصلہ لا پر مُنحنی کی بلندی صا کی قیمت حسب ذیل ہے:-

صا = ۲ لا - لا²/۳۰، تو سمپسن کے قاعدہ سے رقبہ دریافت کرو۔ ذیل کے ضابطے سے نتیجہ کی تصدیق کرو:-

رقبہ = ۲/۳ ل ب، جہاں ب = مُنحنی کی انتہائی بلندی۔

۹- سیسے کے ایک ٹھوس ہرم کا وزن دریافت کرو جس کا قاعدہ ۴ انچ کا مربع ہے اور جس کا انتصابی ارتفاع ۸ انچ ہے۔ سیسے کا وزن ۴۱ر۰ پونڈ فی مکعب انچ ہے۔

۱۰- ایک مجوف مخروطی ظرف کا اندرونی قطر چوٹی پر ۶ انچ ہے

اور اندرونی گہرائی ۹ اِنچ ہے، جتنا پانی اِس میں آسکتا ہے اُس کا وزن دریافت کرو۔ پانی کا وزن ۰۳۶ء۰ پونڈ فی مکعب اِنچ ہے۔

۱۱- لوہے کے ایک ٹھوس گولے کا قُطر دریافت کرو تاکہ وزن ۹۰ پونڈ ہو۔ لوہے کا وزن ۲۶ء۰ پونڈ فی مکعب اِنچ ہے۔

۱۲- تین چھوٹے جسم ا، ب، س، جن کی کمیتیں علی الترتیب ۲، ۳، ۴، گرام ہیں کسی مثلث کے تینوں کونوں پر ترتیب دئے جاتے ہیں۔ مثلث کے ضلعے ا ب = ۸ سمر، ب س = ۱۲ سمر، س ا = ۱۰ سمر ہیں۔ تو اُن تجاذبی اثروں کا مقابلہ کرو جو ا، ب پر ا، س پر، اور س، ب پر پیدا کرتا ہے۔

۱۳- اگر زمین سے چاند کا فاصلہ ۲۴۰۰۰۰ میل ہو اور سُورج سے چاند ۹ کروڑ میل ہو تو چاند پر زمین اور سُورج کے تجاذبی اثروں کا مقابلہ کرو۔ جبکہ سُورج کی کمیت زمین کی کمیت کا ۳۲۰۰۰۰ گنا ہو۔

۱۴- کمیت اور وزن کے فرق کی تشریح کرو۔ کسی جسم کی کمیت اور وزن پر (ا) عرض البلد کے تغیر (ب) ارتفاع کے تغیر کا کیا اثر پڑتا ہے؟

اگر کسی اونچے پہاڑ کی چوٹی کے قریب ایک تجربہ خانہ کے لئے نہایت نازک ترازو کی ضرورت ہو تو کیا تم یہ رائے دوگے کہ اس بلندی کے لئے خاص طور سے وزن بنائے جائیں؟ اپنے جواب کے دلائل بھی پیش کرو۔

۱۵- وزن سے کیا مُراد ہے؟ توجیہ کرو کہ ایک نہایت نازک کمانیدار ترازو زمین کے مختلف مقامات پر ایک ہی جسم کے وزن میں کیوں فرق بتلائیگی درانحالیکہ معمولی ترازو سے اِس قسم کا کوئی فرق نہیں معلوم ہوتا۔

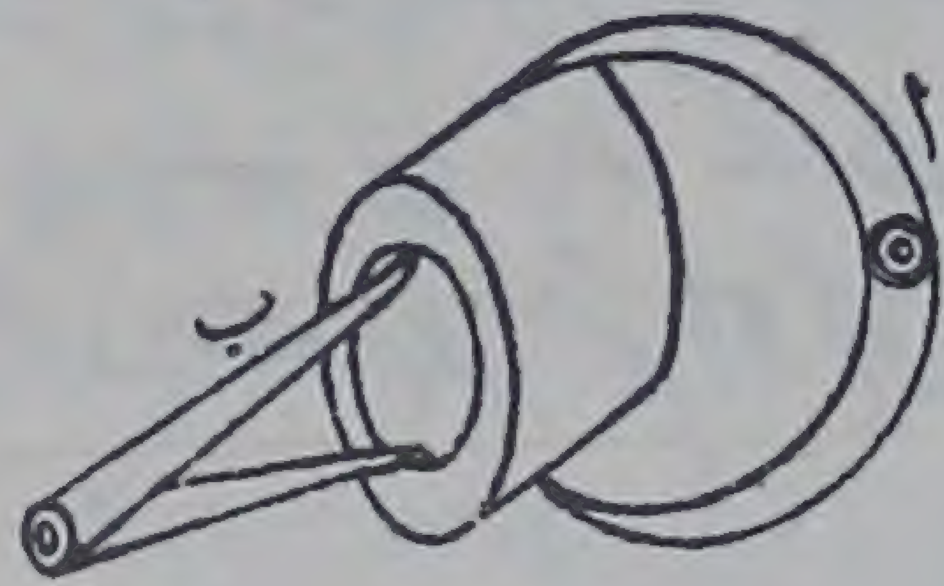
دُوسری فصل

سادہ پیمائشیں اور آلاتِ پیمائش

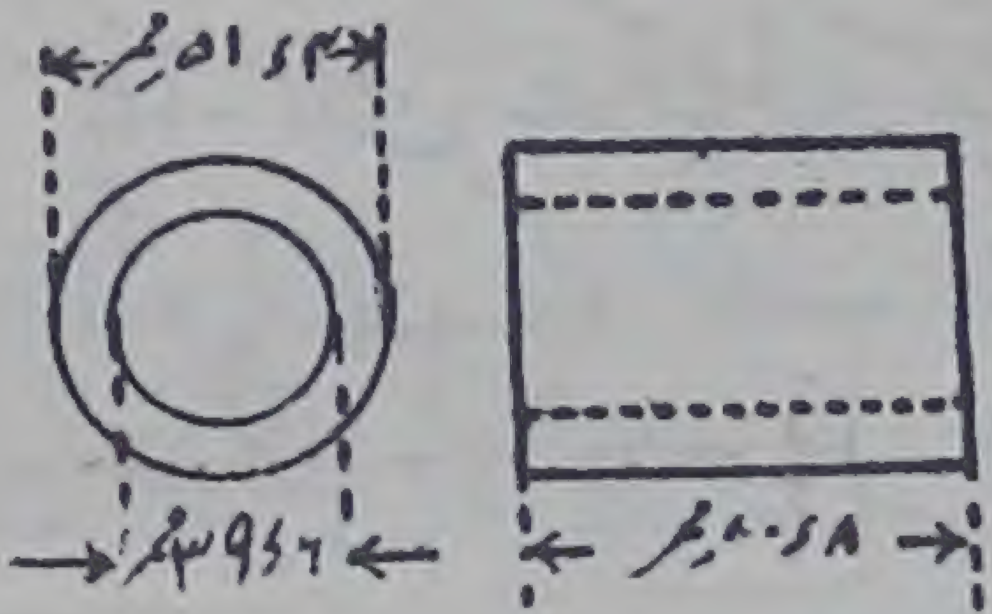
ابتدائی تجربات ——— اِس فصل میں جو تجربات بیان کئے گئے ہیں اُن سے منشاء یہ ہے کہ متعلم پیمائش کے سادہ آلات سے مانوس ہو جائے۔

تجربہ ۱ ——— **پیمانے:۔** تجربہ خانے کے پیمانوں میں عموماً ایک طرف کنارے پر تو سنٹی میٹر کے نشان ہوتے ہیں جو خود ملی میٹروں میں منقسم ہوتے ہیں اور دوسرے کنارے پر اِنچ کے نشانات ہوتے ہیں اور ہر اِنچ دس حِصّوں میں منقسم ہوتا ہے۔ اِن میں سے کسی ایک پیمانے کے ایک حِصّہ کو ذیل کے طریقہ پر بناؤ:۔

مناسب چوڑائی کی مقوے کی ایک پٹی لو اور اُس پر طولاً چند خطوط کھینچو جو پیمانے کے خطوط کے مطابق ہوں۔ پٹی اور پیمانے کو کنارے سے کنارہ ملا کر میز پر رکھو اور اِن کو پھسلنے سے روکنے کے لئے باندھ دو۔ ایک سِتّہ پرکار میں ۲ سم کی دُوری پیدا کرو۔ پرکار میں ایک سخت نوکدار پنسل یا ایک سیاہ روشنائی میں ڈوبا قلم ہونا چاہئے۔ پرکار کے نوکدار پائے کو پیمانے کے نشانوں پر یکے بعد دیگرے رکھو اور مقوے



شکل ۷۔ سرل چاپ کا استعمال



شکل ۸۔ ایک مجوّف اُستوانہ

پر چھوٹی چھوٹی لکیریں دُوسری نوک سے بناتے جاؤ اور ہر پانچویں لکیر کو ذرا بڑا بناؤ۔ پھر مقوے کے نشانوں پر نمبر ڈال دو۔

تجربہ ۲ ——— پیمانے اور سہرل چاپ کا استعمال—

مختلف شکلوں اور مختلف چیزوں کے بنے ہوئے جسم دئے گئے ہیں۔ اِن میں سے ہر ایک کا خاکہ صفائی کے ساتھ بناؤ۔ جسم پر پیمانہ رکھ کر، یا پہلے بیرونی سہرل چاپ ا یا اندرونی سہرل چاپ ب استعمال کر کے اور پھر اِس کو پیمانہ پر رکھ کر، جسم کے تمام ابعاد کی پیمائش کرو اور اِن کو خاکوں میں درج کر دو۔ شکل ۸ میں ایک مجوّف اُستوانہ کے پیمائش شدہ خاکے دکھلائے گئے ہیں۔

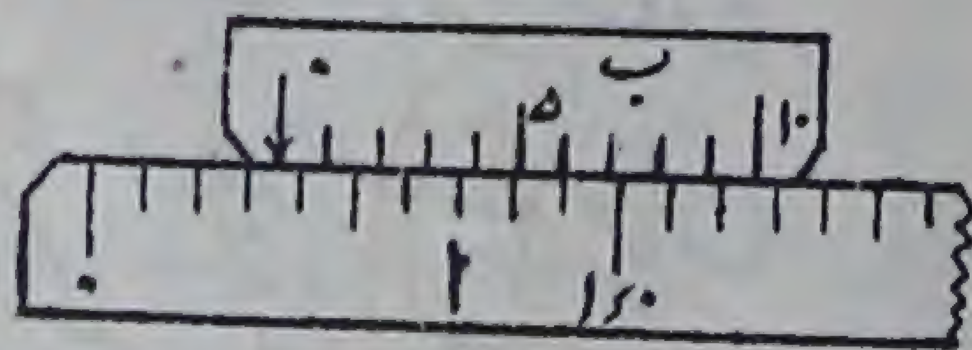
اِن پیمائش شدہ ابعاد کی مدد سے اور مساحت کے ضابطوں کو استعمال کر کے ہر ایک جسم کا حجم دریافت کرو۔

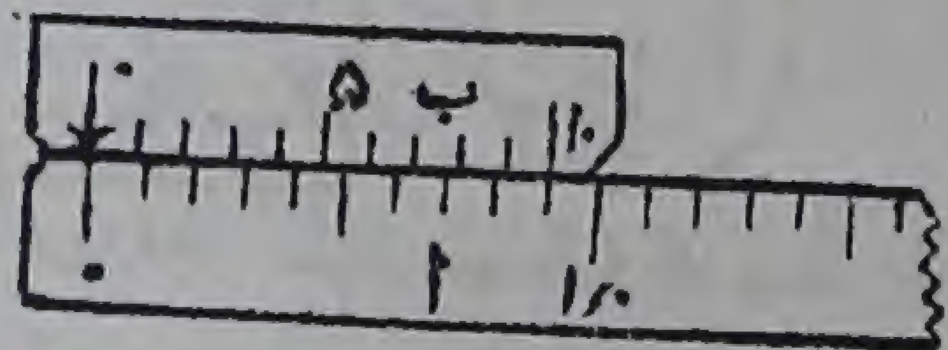
متعلم کو آنکھ کی مدد سے پیمانے کے نشان کے دسویں حصّے تک اندازنے کی مشق ہونا چاہئے۔

کسر پیما:—

پیمانوں میں عموماً نصف ملی میٹر سے چھوٹے نشانات نہیں ہوتے۔ اس سے چھوٹے نشان کسر پیما کی مدد سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ کسر پیما ایک ایسا آلہ ہے جس کی مدد سے محض نظری تخمین کی بہ نسبت زیادہ صحیح پیمائش حاصل ہو سکتی ہے۔

شکل ۹ میں ۲ ایک پیمانہ ہے اور ب ایک کسر پیما ہے۔ ب پیمانہ ۲ کے کنارے کنارے حرکت کر سکتا ہے۔ کسر پیما پر ۰ سے ۱۰ نشان تک کا طول پیمانے کے ۹ نشانوں کے مساوی ہے۔ پس کسر پیما کا ہر نشان پیمانہ کے نشان کا ۰٫۹ ہے۔

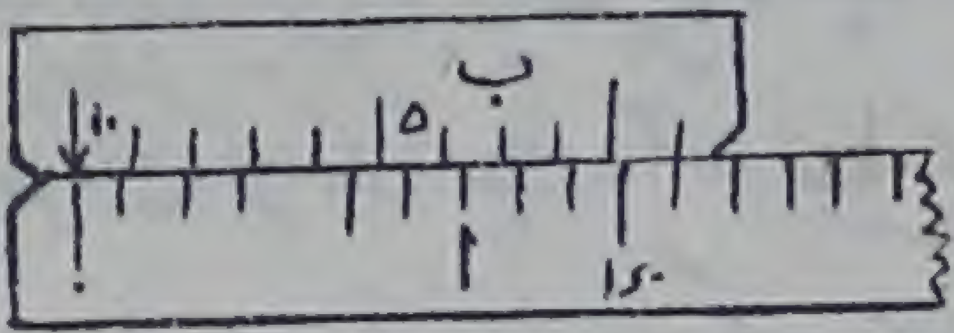




شکل ۹ — پیش خوں کسر پیما شکل ۱۰

اگر ب کو اِتنا بڑھایا جائے کہ کسر پیما کا نشان ۱ ' ۲ کے نشان ۱ء۰ کی سیدھ میں ہو تو وہ فاصلہ جو کسر پیما کے صفر کو پیمانہ کے صفر سے علیحدہ کرتا ہے پیمانے کے ایک نشان کا دسواں حصّہ ہوگا۔ اگر کسر پیما کا نشان ۲ ' ۲ کے نشان ۲ء۰ کے ہم خط ہو تو دونوں صفروں میں فاصلہ پیمانے کے نشان کا دو دسواں حصّہ ہوگا۔ وقِس علیٰ ہذا۔ پس اِس طرح کسر پیما کے ذریعہ سے محض یہ دیکھ کر کہ کسر پیما کا کون سا نشان ۲ کے کسی نشان سے منطبق ہے پیمانے کے نشان کے دسویں حصّہ تک پیمائش کی جاسکتی ہے۔ شکل ۱۰ میں کسر پیما اور پیمانے کے ذریعہ سے ۳۶ء۰ نشانِ پیمانہ بتلایا گیا ہے۔ ۳ء۰ کو پیمانے سے دیکھتے ہیں اور ۶ کو کسر پیما سے۔

جس آلے کی اُوپر تشریح کی گئی ہے وہ **پیش خواں کسر پیما** ہے۔ شکل ۱۱ میں اِس کے مقابل ایک پس خواں کسر پیما دکھلایا گیا ہے۔ اِس صورت میں کسر پیما کے ۱۰ نشان طول میں پیمانے کے ۱۱ نشانوں کے مساوی ہیں. اور کسر پیما کے درجے پیمانے کے درجوں سے مخالف سمت میں لکھے ہوئے ہیں۔ پیمانے سے طول دریافت کرتے وقت تیر کے مقام سے نشان پڑھا جاتا ہے اور اعشاریہ کا دُوسرا درجہ حسبِ سابق کسر پیما سے۔



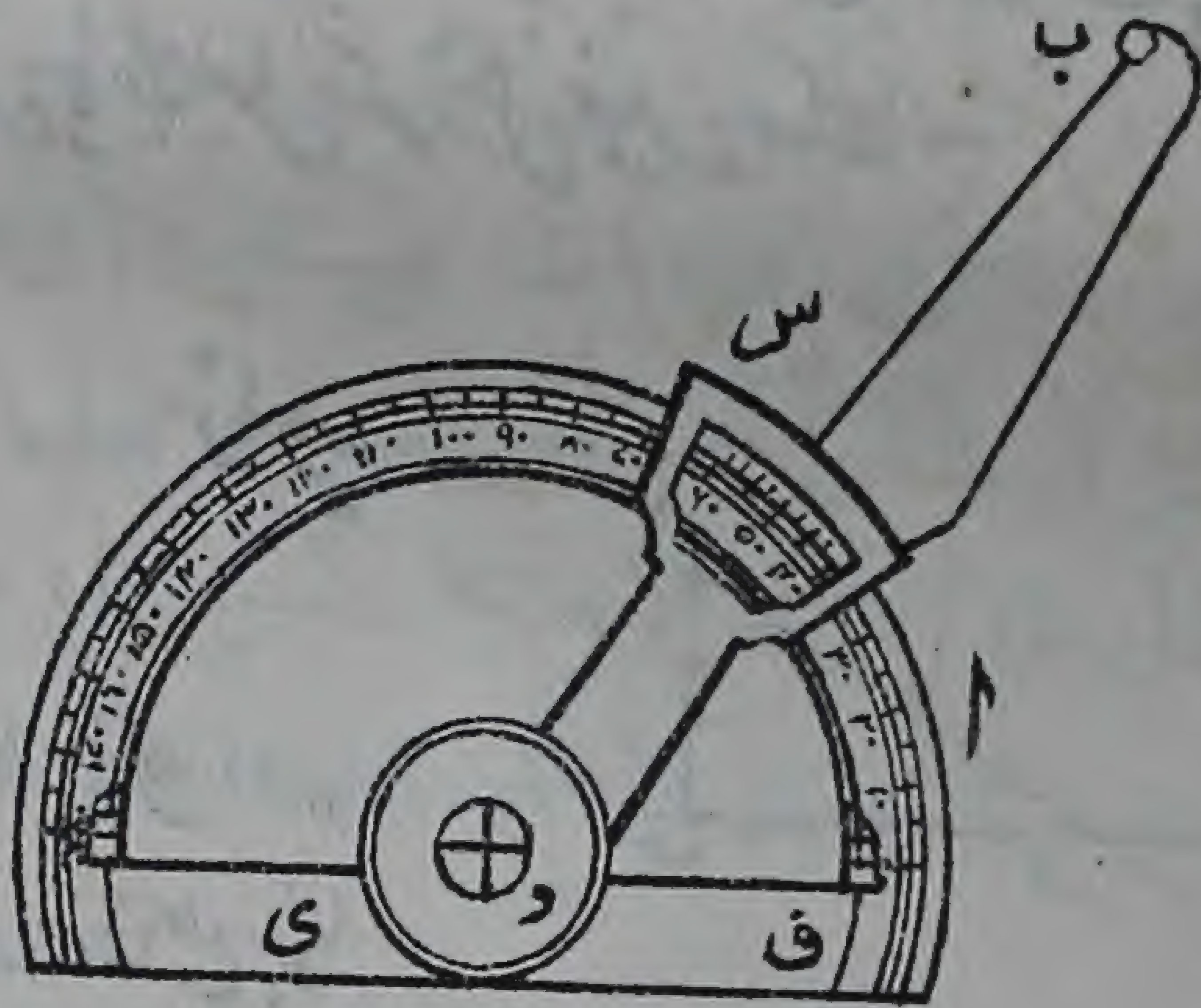
شکل ۱۱
پس خواں کسر پیما

ذیل کا اُصول کسر پیماؤں کے بنانے اور پڑھنے میں مفید ہے۔ فرض کرو کہ کسی پیش خواں کسر پیما کا کُل طول (ن - ۱) نشانِ پیمانہ

ہے یا کسی پس خواں کسر پیما کا طول (ن + ۱) نشانِ پیمانہ ہے اور فرض کرو کہ
کسر پیما پر ن درجے ہیں۔ تو کسر پیما $\frac{1}{ن}$ درجہ پیمانہ تک پڑھ سکتا ہے۔
متعلم اس بات کی تصدیق کر سکتا ہے کہ اگر کسر پیما کا طول
(۲ن ∓ ۱) نشانات پیمانہ ہو [- برائے پیش خواں اور + برائے پس خواں کسر پیما)
اور اگر کسر پیما پر ن درجے ہوں تو کسر پیما پیمانہ کے درجے کے $\frac{1}{ن}$ تک
پڑھ سکتا ہے۔

زاویوں کی پیمائش :-

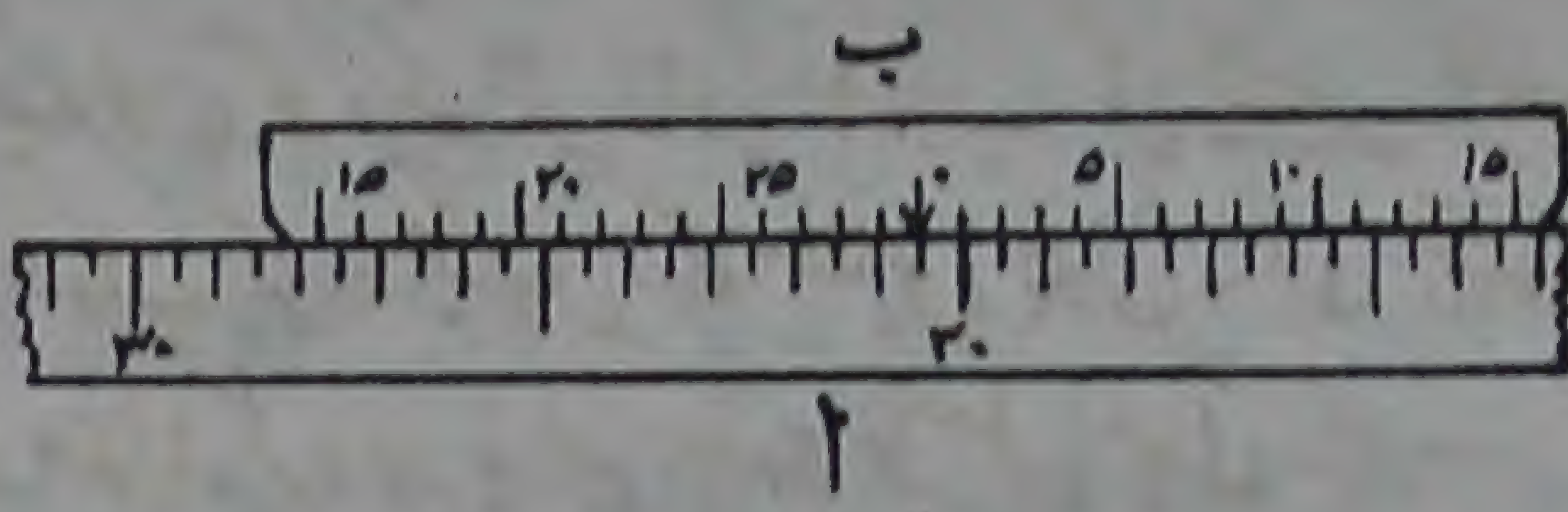
شکل ۱۲ میں ایک چاندہ دکھلایا گیا ہے جس کے ذریعہ سے
ایک دقیقہ تک کے زاویہ کی پیمائش ہو سکتی ہے۔ پیتل کا ایک آدھا دائرہ



شکل ۱۲۔ کسر پیما چاندہ

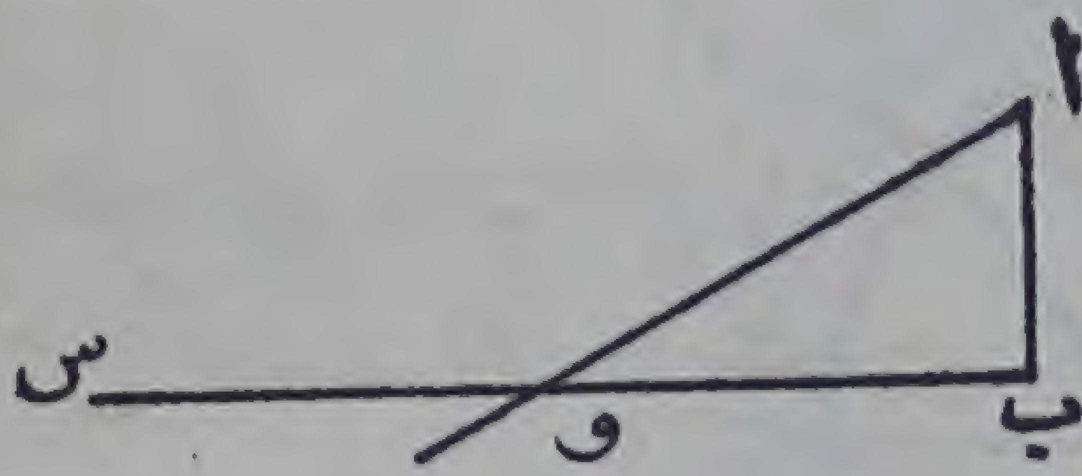
ا ہے جس میں ایک بازو ب س د ہے جو د پر گھوم سکتا ہے۔ ا پر ایک
پیمانہ نصف درجوں میں تقسیم شدہ کندہ ہے۔ اور بازو پر ایک کسر پیما ہے۔
چاندے کا مرکز د پر دو خطوطِ چلیپی کا نقطۂ تقاطع ہے۔ کنارے ب س کو
جب بڑھایا جائے تو وہ کسر پیما کے صفر سے اور د پر نقطۂ تقاطع سے گزرتا
ہے۔
کسر پیما ایک مرکز خواں کسر پیما ہے جس کو شکل ۱۳ میں

ایک مستقیم پیمانے کے طور پر دکھلایا ہے۔ کسرِ پیما کا کل طول پیمانے کے



شکل ۱۳

۲۹ درجوں کے مساوی ہے اور کسرِ پیما میں کُل ۳۰ نشان ہیں۔ اِس لئے پیمانے کے درجے کے تیسویں حِصّے یعنی ایک دقیقہ تک کسرِ پیما پڑھ سکتا ہے۔ کسرِ پیما کے بیچ میں صفر رکھنے سے غرض یہ ہے کہ یہ شُبہ باقی نہ رہے کہ کسرِ پیما کے کس کنارے سے نشان پڑھنا چاہئے۔ ی اور ف پر سُوئیاں نکلی ہوئی ہیں جس سے کسرِ پیما پھسل کر نکل نہیں سکتا۔



شکل ۱۴

تجربہ ۳ — زاویہ کی پیمائش :—

(ا) دو خطوط ا و اور ب و س کھینچو جو و پر متقاطع ہوں (شکل ۱۴)۔ اب چاندہ اِس طرح سے رکھو کہ چلیپہ کا نقطۂ تقاطع و پر منطبق ہو اور ۰° اور ۱۸۰° کے نشانات ب و س پر واقع ہوں۔ اب بازُو کو اِس طرح حرکت دو کہ کنارہ ب س (شکل ۱۲) ا و پر منطبق ہو۔ اب جو نشان ہو اُس کو زاویہ ا و ب کی قدر جانو۔ ایک چھوٹا سا عدسہ کسرِ پیما کے پڑھنے میں بہت مدد دیگا۔

ا و کے کسی نقطہ ا سے و ب پر عمود ا ب گراؤ۔ و ب، ب ا، اور ا و کی پیمائش کرو اور ذیل کی مثلثی نسبتوں کی قیمت لکھو:—

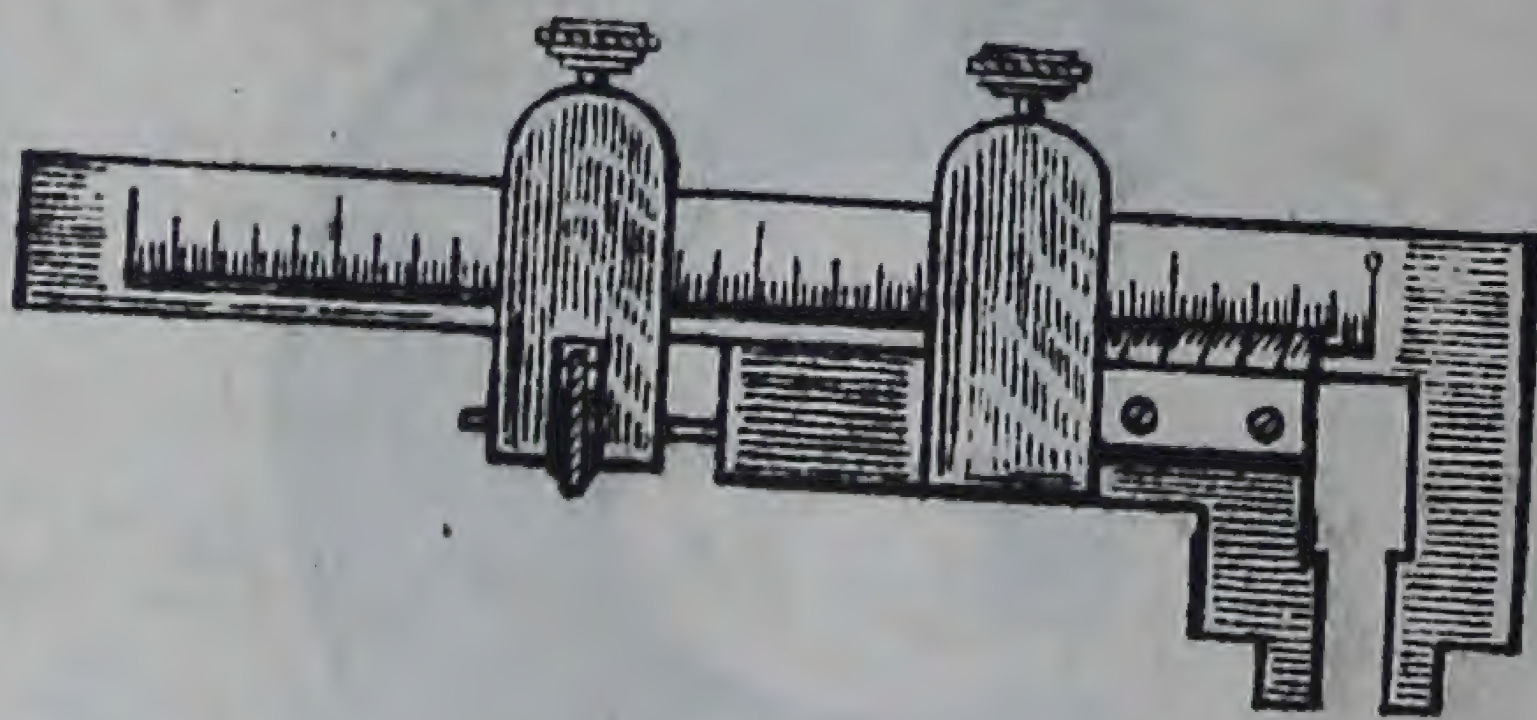
جب اؤب = $\frac{\text{اب}}{\text{او}}$ ، جم اؤب = $\frac{\text{وب}}{\text{وا}}$ ، مس اؤب = $\frac{\text{اب}}{\text{وب}}$

مثلثی جدولوں کو دیکھ کر زاویہ اؤب کی قیمتیں لکھو جو جیب، جیب التمام اور مماس کی حساب کردہ قیمتوں کے مطابق ہوں۔ اِن قیمتوں کا اوسط نکالو اور اُس قیمت سے مقابلہ کرو جو بذریعہ چاندہ حاصل ہوئی ہے۔

(ب) کوئی مثلث کھینچو۔ بذریعہ چاندہ اِس کے تینوں زاویوں کی پیمائش کرو۔ پھر اِس مسئلہ کی تصدیق کرو کہ کسی مثلث کے تینوں زاویئے مل کر ۱۸۰° کے مساوی ہوتے ہیں۔

سرل چاپ —

سرل چاپ (شکل ۱۵) ایک فولادی سلاخ پر مشتمل ہے جس پر ایک پیمانہ کندہ ہوتا ہے۔ ایک دوسرا ٹکڑا اِس سلاخ پر حرکت کرتا ہے اور اِسی میں کسر پیما ہوتا ہے۔ ایک روک پیچ اور خفیف حرکت پیچ بھی ہوتا ہے جس کے ذریعہ سے متحرک ٹکڑا بہت ہی آہستہ آہستہ سلاخ پر حرکت کر سکتا ہے۔ جس چیز کی پیمائش منظور ہوتی ہے وہ سرل چاپ کے جبڑوں کے درمیان رکھی جاتی ہے اور پھر متحرک حصّہ قریب لایا جاتا ہے یہاں تک کہ وہ مَس کرے اور بہت ہی آہستگی سے دبائے۔



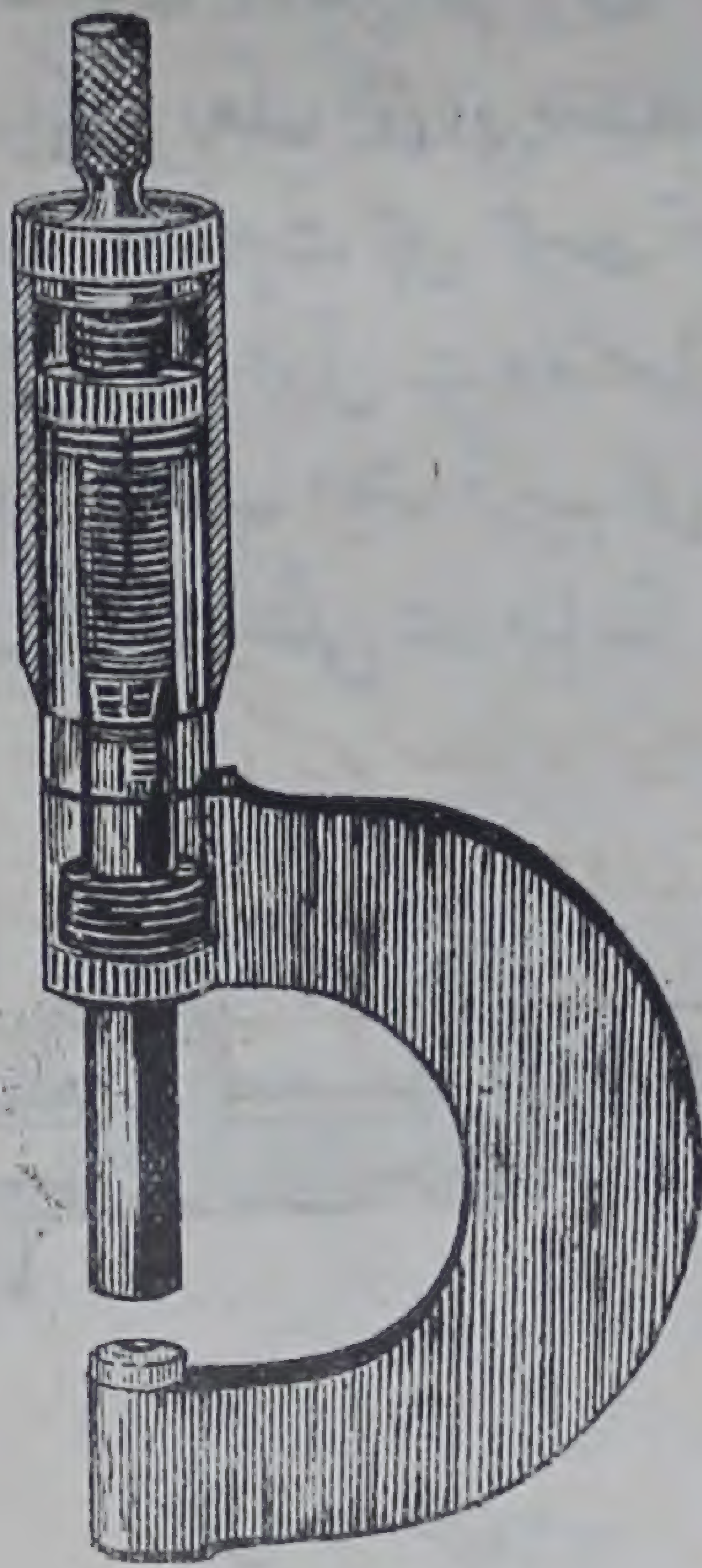
شکل ۱۵ ۔ سرل چاپ

میتری سرل چاپ میں پیمانہ پر سنتی میتر ہوتے ہیں جن میں

نصف ملی میٹر تک کے درجے ہوتے ہیں ۔ کسر پیما کا طول ۲۴ نشانات پیمانہ (یعنی ۱۲ ممر) کے مساوی ہے اور اس میں ۲۵ نشان ہیں، پس کسر پیما $\frac{۱}{۲۵} \times \frac{۱}{۲} =$ ۰۲ء۰ ممر تک پڑھ سکتا ہے ۔ انگریزی آلات میں انچوں کا پیمانہ انچ کے چالیسویں حصہ تک منقسم ہے ۔ کسر پیما کا طول ۲۴ نشاناتِ پیمانہ ہے اور اس میں ۲۵ نشان ہیں ۔ پس $\frac{۱}{۲۵} \times \frac{۱}{۴۰} =$ ۰۰۱ء۰ انچ تک پڑھا جا سکتا ہے ۔ دونوں پیمانوں کے پڑھتے وقت ایک چھوٹے عدسے سے کام لیا جائے تو بہتر ہے ۔

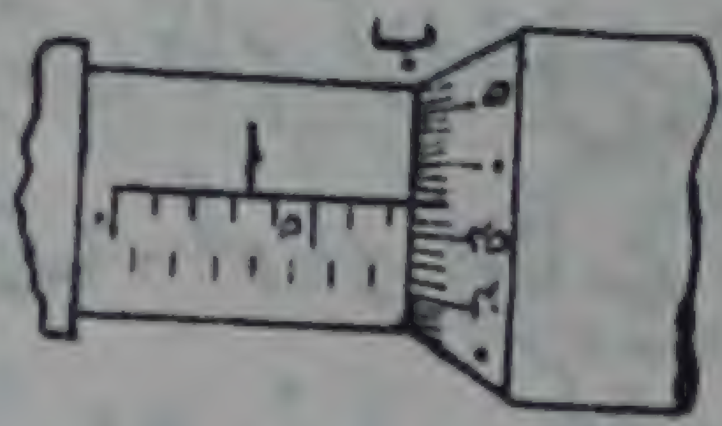
خردہ پیما یا پیچدار پیمانہ :۔

یہ آلہ (شکل ۱۶) ایسے سرل چاپ سے بہت کچھ مشابہ ہوتا ہے



شکل ۱۶ ۔ خردہ پیما

جس کے ایک بازُو میں پیچ لگا ہو۔ شئے زیرِ پیمائش کو پیچ کی نوک اور دُوسرے بازو کے جبڑے کے درمیان رکھتے ہیں اور پھر پیچ کو گھماتے ہیں تا آنکہ وہ شئے سے مَس کرنے لگے۔ جس خول میں پیچ ہے اُس پر ایک پیمانہ کندہ ہے اور دُوسرا پیمانہ پیچ کی ٹوپی کے گرد کندہ ہے۔ شکل ۱۷ میں اِن پیمانوں کی ایک مکبّر صورت دکھلائی گئی ہے۔ پیچ میں فی ملی میٹر دو چوڑیاں ہیں۔ پس ایک گردش سے ۰٫۵ مم کی محوری حرکت پیدا ہوگی۔ خولی پیمانہ ا میں ملی میٹر دکھائے گئے ہیں۔ ایک دُوسرا امدادی پیمانہ جو ا کے نیچے ہے اِس میں نصف ملی میٹر دکھائے گئے ہیں۔ ٹوپی والے پیمانہ ب میں ۵۰ نشانات ہیں۔ پس چونکہ ٹوپی کی ایک کامل گردش ۰٫۵ مم کے مساوی ہے اِسلئے ا کے محوری خط پر ا کے پیمانے کے ایک نشان بھر ب کی حرکت $\frac{1}{50} \times 0.5 = 0.01$ مم ہوگی۔ پس اِس سے ملی میٹر کے سویں حصّے تک پڑھ سکتے ہیں۔ شکل ۱۷ میں پیمانے اِس طرح رکھے گئے ہیں کہ ۷٫۴۷ مم بتلاتے ہیں۔



شکل ۱۷۔ خردہ پیما کے پیمانے

انگریزی نظام کے مطابق تقسیم شدہ خردہ پیماؤں کے پیچ میں ۴۰ چوڑیاں فی انچ ہوتی ہیں۔ خولی پیمانے ا پر انچ چالیسووں میں منقسم ہوتے ہیں اور ٹوپی والے پیمانے میں ۲۵ نشان ہوتے ہیں۔ پس آلہ سے $\frac{1}{25} \times \frac{1}{40} = 0.001$ انچ تک پڑھا جا سکتا ہے۔

اگر پیچ کی نوک دُوسرے بازو کے جبڑے سے مَس کرتی ہو تو پیمانوں پر نشان صفر ہونا چاہیئے۔ اگر ایسا نہیں ہے تو دونوں پیمانوں کو پڑھ لینا چاہیئے اور پھر مابعد کی تمام پیمائشوں میں بطور تصحیح استعمال کرنا چاہیئے۔

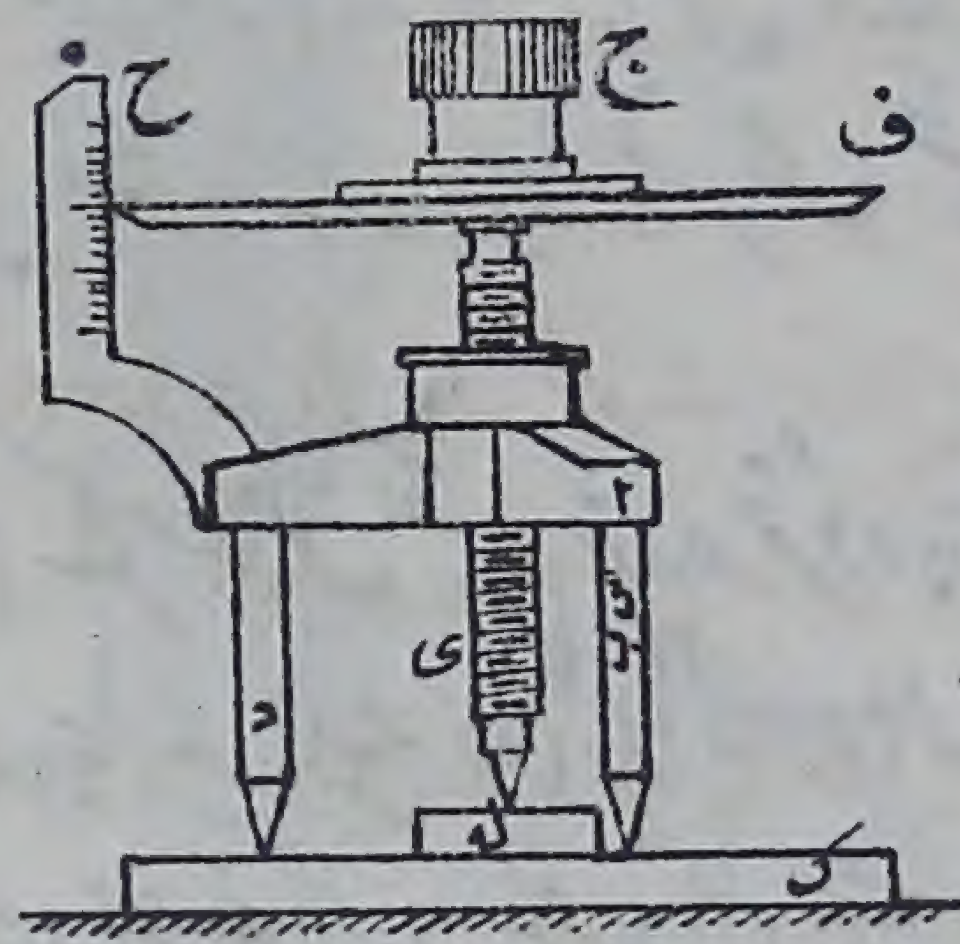
تجربہ ۴ — سرل چاپ اور خردہ پیما کا استعمال۔

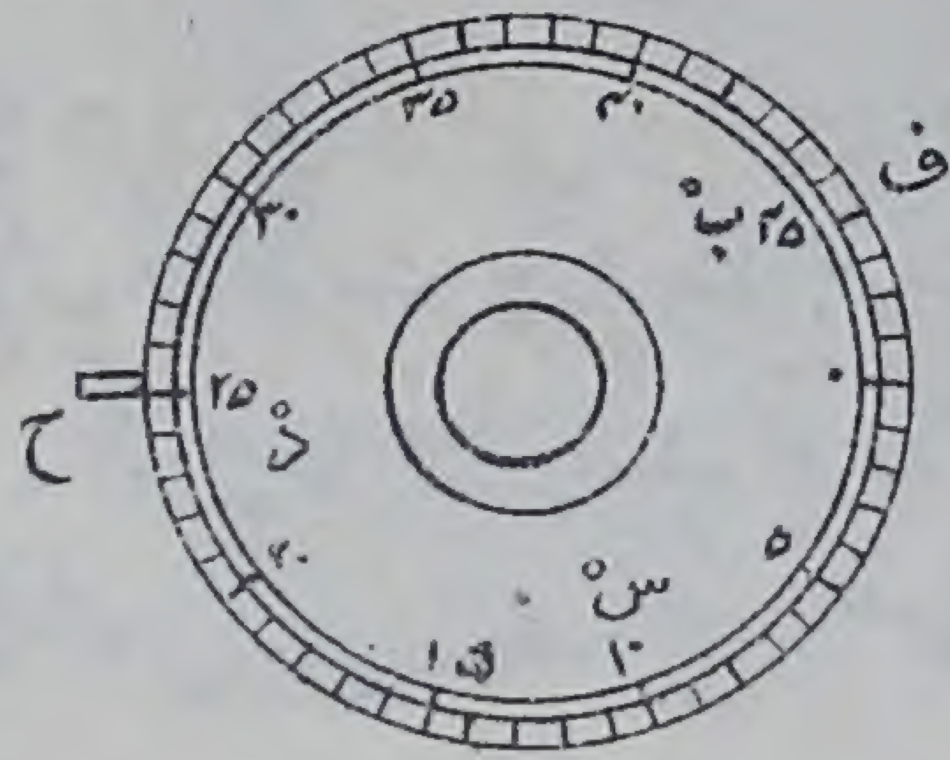
تجربہ ۲ کی استعمال کردہ اشیاء کو پھر ایک مرتبہ لو۔ سرل چاپ اور خُردہ پیما کے ذریعہ پھر اِن کی پیمائش کرو۔ اِن ابعاد سے حجم کا حساب لگاؤ۔ اور تجربہ ۲ سے حاصل کردہ نتائج سے اِن کا مقابلہ کرو۔

متعلم کو یہاں یہ یاد دہانی کی جاتی ہے کہ حسابات کے نتائج میں اُسی حد تک اعداد رکھنا چاہئیں جہاں تک صحتِ پیمائش اجازت دے۔ چنانچہ اگر آلہ سے ہم صرف ۰۱ء۰ مم تک پڑھ سکتے ہیں تو نتیجہ کو ۳۲۱٫۴۶۹۳۴ مکعب ملی میتر میں ظاہر کرنا فعلِ عبث ہوگا۔ اعشاریہ کے چار درجے بسا اوقات بہت کافی ہوتے ہیں۔ عموماً یہ ہوتا ہے کہ جس درجہ اعشاریہ تک نتیجہ مطلوب ہوتا ہے اُس سے ایک درجہ زیادہ رکھتے ہیں۔ مثلاً ۳۲۱٫۴۶ کے یہ معنی ہونگے کہ ۳۲۱٫۴ بلا تکلف صحیح مانا جا سکتا ہے لیکن آخری عدد ۶ کے متعلق کسی قدر شبہ ہے۔

گرُویت پیما

شکل ۱۸ میں معمولی قسم کا گرُویت پیما دکھلایا گیا ہے۔ ایک چھوٹی





شکل ۱۸۔ گرُویت پیما

تپائی ا ہے جس کے تین نوکدار پائے ب، س، اور د اِس طرح ترتیب دئے گئے ہیں کہ اِن کی نوکوں سے ایک مثلث متساوی الاضلاع بن جاتا ہے۔ ایک نوکدار پایہ ی اَور ہے جس میں پیچ ہے۔ اِس کی نوک مثلث کے بیرونی دائرہ کے مرکز پر ہے۔ اِس پیچ میں ایک درجہ دار گول قرص ف ہے۔ اِس کے اُوپر ایک ٹوپی ج ہے جس سے پیچ کو گھمانے میں سہولت ہوتی ہے۔ اپر ایک پیمانہ ح نصب ہے جس پر پیچ کی گھائی کے برابر فاصلے سے نشانات کندہ ہیں۔ یہ آلہ شیشے کی تختی ک پر قائم ہے جس کی بالائی سطح حتی الامکان مستوی ہوتی ہے۔ ل ایک شئے زیرِ پیمائش ہے جس کی دبازت مطلوب ہے۔

جو آلہ شکل میں دکھلایا گیا ہے اُس میں فی ملی میتر دو چوڑیاں ہیں۔ ف کے گول پیمانے میں ۵۰ درجے ہیں جن میں سے ہر ایک دس دس حصّوں میں تقسیم ہے۔ پس آلہ سے $\frac{1}{500} \times \frac{1}{2} = 0.001$ مم تک پڑھ سکتے ہیں۔

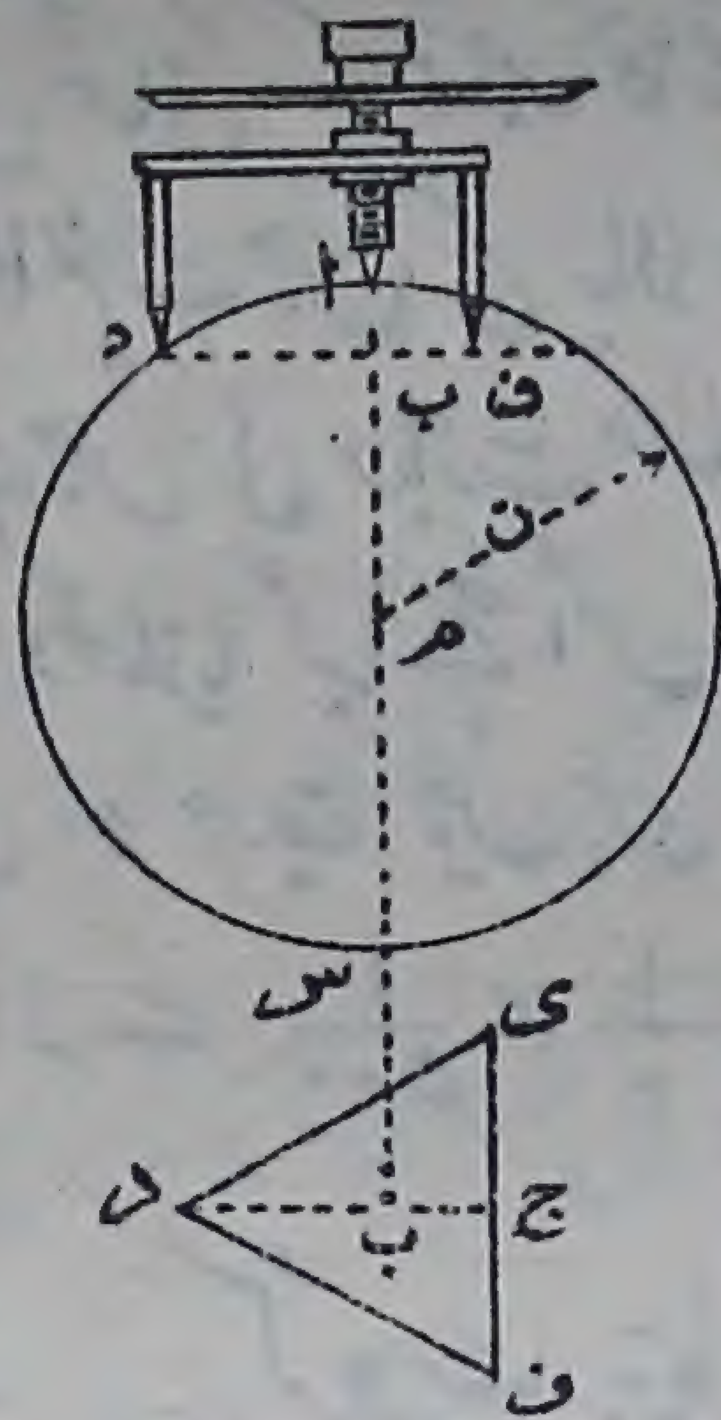
تجربہ ۵ — کُرویت پیما سے کسی شئے کی دبازت —

کُرویت پیما کو شیشے کی مستوی تختی پر رکھو۔ پیچ کو گھماؤ یہاں تک کہ چاروں نوکیں شیشے پر برابر بیٹھ جائیں۔ اِس شرط کو پُورا ہوتے دیکھنے کے لئے کسی ایک پایہ کو تقریباً اُفقی سمت میں ذرا سا دھکا دو۔ اگر آلہ گھومے تو پیچ کی نوک زیادہ اُتر گئی ہے اور اِس کو اُوپر چڑھانا چاہئے۔ اگر آلہ صرف پھسل جائے تو پیچ کی نوک ٹھیک نہیں بیٹھی ہے۔ پیمانوں کے نشانات پڑھ لو۔ اب پیچ کو اُوپر چڑھاؤ یہاں تک کہ شئے زیرِ تجربہ پیچ کی نوک کے نیچے آ جائے۔ اور پھر حسبِ سابق آلہ کو ترتیب دو۔ پیمانوں کے نشانات کو پھر پڑھو۔ دونوں مرتبہ کے نشانات کا فرق دبازتِ مطلوبہ ہوگا۔

چھوٹی چھوٹی چیزوں کی دبازت تین چار مقامات پر لے کر ہر چیز کی اوسط دبازت معلوم کرو۔

تجربہ ۶ — کسی کُروی سطح کے نصف قُطرِ انحناء کے دریافت کرنے کے لئے کُرویت پیما کا استعمال :-

دی ہوئی کروی سطح کے نصف قطرِ انحناء کو ذیل کے طریقہ سے پیمائش کرو۔ آلہ کو شیشے کی مستوی تختی پر رکھو اور پیمانوں کے نشان پڑھو۔ اِن کو ہم نشانات صفر کہینگے۔ اب کرُویت پیما کو کروی سطح پر رکھو (شکل نمبر ۱۹)۔ اِس کو درست کرکے پھر



شکل نمبر ۱۹۔ کرُوی سطح پر کرُویت پیما

پیمانوں کو پڑھو۔ اِن دونوں نشانوں کا فرق شکل نمبر ۱۹ میں ا ب کے مساوی ہوگا۔ فرض کرو

ا ب = ح ممر

ن = نصف قطرِ انحناء مر میں

تو شکل نمبر ۱۹ میں از رُوئے ہندسہ

س ب × ب ا = ب د^۲

یا (۲ ن - ح) ح = ب د^۲

∴ ن = ب د^۲ / ۲ ح + ح / ۲ ۔۔۔۔۔۔ (۱)

ب د حاصل کرنے کے لئے کرُویت پیما کو رانگ کے ایک ٹکڑے پر رکھو۔ اور آہستہ سے دباؤ کہ د، ی، ف، (شکل نمبر ۱۹) کا محل متعین ہو جائے۔

د ی، ی ف، ف د کی پیمائش کرو اور اوسط نکالو۔ فرض کرو کہ یہ طول س ممر ہے۔ زاویۂ ی د ج ۳۰° کا ہے اور ب د، د ج کا دو تہائی ہے۔ پس

$$\text{ب د} = \frac{۲}{۳}\ \text{د ج}$$

$$= \frac{۲}{۳}\ \text{د ی جم } ۳۰^\circ$$

$$= \frac{۲}{۳}\ \text{س}\ \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۳}\ \text{س}$$

$$\therefore\ \text{ب د}^۲ = \frac{۱}{۳}\ \text{س}^۲ \quad \ldots\ldots\ (۲)$$

اِس قیمت کو (۱) میں درج کرنے سے

$$\text{ن} = \frac{\frac{۱}{۳}\text{س}^۲}{۲\text{ح}} + \frac{\text{ح}}{۲}$$

$$= \frac{\text{س}^۲}{۶\text{ح}} + \frac{\text{ح}}{۲} \quad \ldots\ldots\ (۳)$$

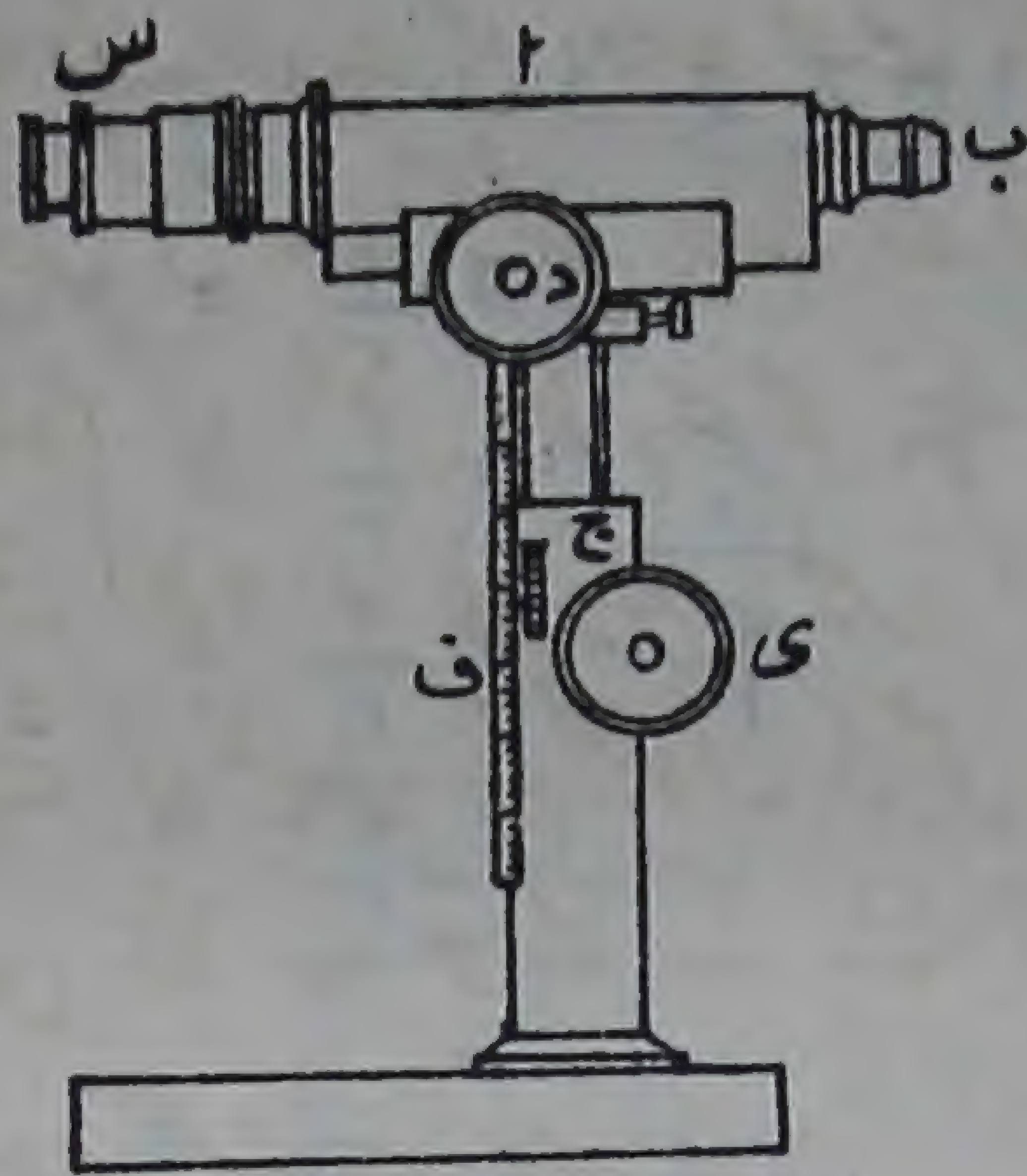
ایک بہت ہی چپٹی کُروی سطح کی صورت میں ح کی قیمت بہت کم ہوگی۔ اِس لئے (۳) میں پہلی رقم بمقابلہ دُوسری رقم کے بہت عظیم ہو جائیگی پس ہم ضابطہ کو ذیل کی صورت میں لکھ سکتے ہیں:۔

$$\text{ن} = \frac{\text{س}^۲}{۶\text{ح}} \quad \ldots\ldots\ (۴)$$

محدّب اور مقعر دونوں طرح کی سطحوں کے لئے طریقۂ پیمائش و تحویل ایک ہی ہے۔ ہر دِی ہوئی سطح کو دو یا تین جگہوں پر پیمائش کرو۔ ہر پیمائش سے نصف قُطرِ انحناء کا حساب لگاؤ۔ اور اوسط نصف قُطر نکالو۔

تجربہ ۷ — خُردہ پیمائی خُرد بین

اِس آلے میں شئے زیرِ پیمائش ب کے سامنے رکھی جاتی ہے اور خُرد بین ا کے ذریعہ سے دیکھی جاتی ہے (شکل ۲۰)۔ خُرد بین کے چشمہ س میں ایک باریک پیمانہ شیشے پر کندہ ہے اور اِس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ جب چشمہ میں سے دیکھا جائے تو شئے اور پیمانہ دونوں نظر آئیں۔ اُنگشت پیچ د کے ذریعہ سے



شکل ۲۰۔ خُردہ پیمائی خُردبین

خُردبین کو اُفقاً حرکت دی جا سکتی ہے، اِسی طرح دُوسرے پیچ ی کی مدد سے اِس کو اُوپر نیچے کر سکتے ہیں۔ خوردبین کے پائے میں ایک پیمانہ ف ملی میٹروں میں کندہ ہے اور ساتھ ہی اِس کے پائے میں ایک کسر پیما ج لگا ہُوا ہے*۔

پہلے چشمہ کے پیمانہ کے ایک درجے کی قیمت اِس طرح دریافت کرو۔ شئے اور پیمانے کو واضح طور سے ماسکہ میں لاؤ۔ آنکھ کو اِدھر اُدھر حرکت دو اور دیکھو کہ چشمہ سے دیکھتے وقت شئے اور پیمانہ ایک دُوسرے کی اضافت سے تو حرکت کرتے نہیں معلوم ہوتے۔ اگر ایسا ہے تو آلہ کی ترتیب کو درست کر دو تاکہ یہ حرکت جاتی رہے۔ ی کو استعمال کر کے چشمہ کے پیمانے کے صفر کو شئے کے ایک کنارے یا کسی اَور باریک نشان سے منطبق کرو۔ پائے کے پیمانے اور کسر پیما کو پڑھو اور نتیجہ لکھ لو۔ ی کو پھر استعمال کر کے چشمہ والے پیمانے کے کسی اَور نشان مثلاً پچاسویں کو شئے کے اِسی نشان سے منطبق کرو۔ پائے والے پیمانے اور کسر پیما کو پھر پڑھو اور لکھ لو۔ اِن دونوں نتیجوں کا فرق پچاس چشمے والے درجوں کی قیمت ملی میٹروں میں ہوگی۔ اِس سے چشمے والے پیمانے کے ایک درجے کی قیمت نکالو۔ اِس عمل کو دوبارہ کرو اور چشمے والے

* اِس آلہ کے مناظری نظریہ کے لئے اِس کتاب کا وہ حصہ دیکھو جس میں نور سے بحث ہے۔

پیمانے کے نشانات ۲۰ و ۷۰، ۳۵ و ۸۵، اور ۵۰ و ۱۰۰ کو کام میں لاؤ۔ اِن قیمتوں کا مقابلہ کرو اور چشمئی پیمانہ کے ایک درجے کی اوسط قیمت نکالو۔

دی ہوئی چیزوں کی موٹائی چشمئی پیمانے کے نشانوں کو چیز کے بالائی اور زیریں حصے سے منطبق کرکے معلوم کرو۔ محض آنکھ سے بھی پیمانے کے درجے کے دسویں حصے تک تخمین کرو۔ دونوں کا فرق نکالو اور ملی میٹروں میں تحویل کرلو۔

دی ہوئی شیشے کی نلیوں کے ثقبوں کی بھی پیمائش کرو۔

تولنا۔ کسی شئے کے تولنے کے لئے ترازو کا انتخاب شئے کے وزن اور نیز مطلوبہ صحت پر منحصر ہے۔ اگر ایسی ترازویں استعمال کی جائیں جو بھاری جسموں کو وزن کرسکتی ہیں مثلاً ۱۰ کلو گرام تک، تو کوئی خاص احتیاط برتنے کی ضرورت نہیں سوائے اِس کے کہ ترازو کے پلڑوں میں شئے اور باٹ دونوں آہستگی سے رکھے جائیں۔

نازک ترازویں شیشہ بند ہوتی ہیں۔ اور اِن میں ایسی صنعت رکھی جاتی ہے جس سے مختلف حصّوں کی حرکت کو روکا جاسکے اور جب کہ ترازو کام میں نہ آئے تو تمام دھاردار کناروں پر سے دباؤ ہٹایا جاسکے۔ اِن عملوں کو انجام دینے کے لئے ترازو کے خانے کے باہر ایک دستہ یا برم ہوتا ہے۔ اِس دستے کو بہت ہی آہستگی سے حرکت دینا چاہئے اور جب کبھی کسی پلڑے میں باٹ رکھے جائیں یا اِس میں سے نکالے جائیں تو پہلے دستے کے ذریعہ سے حرکت روک دینا چاہئے۔ اِن نازک ترازوؤں کے لئے جو باٹ استعمال کئے جاتے ہیں وہ خانہ دار ڈبوّں میں بند ہوتے ہیں۔ اِن کو کبھی ہاتھ سے نہ چھونا چاہئے۔ اِن کے اُٹھانے کے لئے چمٹیاں مہیا رہتی ہیں۔

تجربہ ۵ — ترازو کا استعمال:-

تجربہ ۴ کی استعمال کردہ اشیاء کو تولو۔ اِس طرح اِن کی کمیت دریافت کرو۔ ہر شئے کی کثافت معلوم کرو۔ اِس کے لئے صفحہ ۴ پر دی ہوئی مساوات اور تجربہ ۴ میں حاصل کردہ حجموں کو استعمال کرو۔

ترازوؤں میں بعض خطائیں بھی ہوتی ہیں۔ جن میں سے اکثر ذیل کے

تولنے کے طریقے میں نکل جاتی ہیں۔ کسی ایک پلڑے میں کوئی ایسی چیز رکھو جس کا وزن شئے زیرِ تجربہ کے وزن سے کچھ زیادہ ہو۔ اب دُوسرے پلڑے میں باٹ رکھو یہاں تک کہ توازن قائم ہو جائے۔ فرض کرو کہ یہ وزن $و_۱$ ہے۔ اب باٹ نکال لو اور اِس کی جگہ وہ شئے رکھ دو جس کا وزن مطلوب ہے۔ اب پھر اَور باٹ رکھو (بالفرض $و_۲$) کہ توازن پھر قائم ہو جائے۔ ظاہر ہے کہ شئے کا وزن فرق $(و_۱ - و_۲)$ کے مساوی ہے۔

تجربہ ۹ —— رقبوں کی پیمائش :۔

کسی مستطیل دفتی پر ایک مثلث کھینچو۔ مثلث کا رقبہ ذیل کے ضابطوں کی مدد سے معلوم کرو :۔

(۱) رقبہ = قاعدہ × ارتفاع عمودی کا نصف

(۲) رقبہ = $\sqrt{س(س-ا)(س-ب)(س-ج)}$ دیکھو صفحہ ۱۰۔

اِس مثلث کو ایک خانہ دار کاغذ پر نقل کر لو اور مربع گن کر رقبہ دریافت کرو۔ نقل کرنے کی ضرورت یوں رفع ہو سکتی ہے کہ ایک خانہ دار نقل گیر کاغذ استعمال کیا جائے جو اصلی شکل پر پورا محیط ہو۔

دفتی کا رقبہ طول اور عرض کا حاصل ضرب لے کر دریافت کرو۔ دفتی کو وزن کر لو اور پھر وزن کو رقبہ سے تقسیم کر کے فی مربع سنتی میٹر وزن معلوم کرو۔ ہوشیاری سے مثلث کو کاٹ لو اور اِس کو علیحدہ وزن کرو۔ اب مثلث کا رقبہ یوں معلوم کرو :۔

مثلث کا وزن = رقبہ مربع سم میں × وزن فی مربع سم

اِن طریقوں میں نتائج کا مقابلہ کرو۔

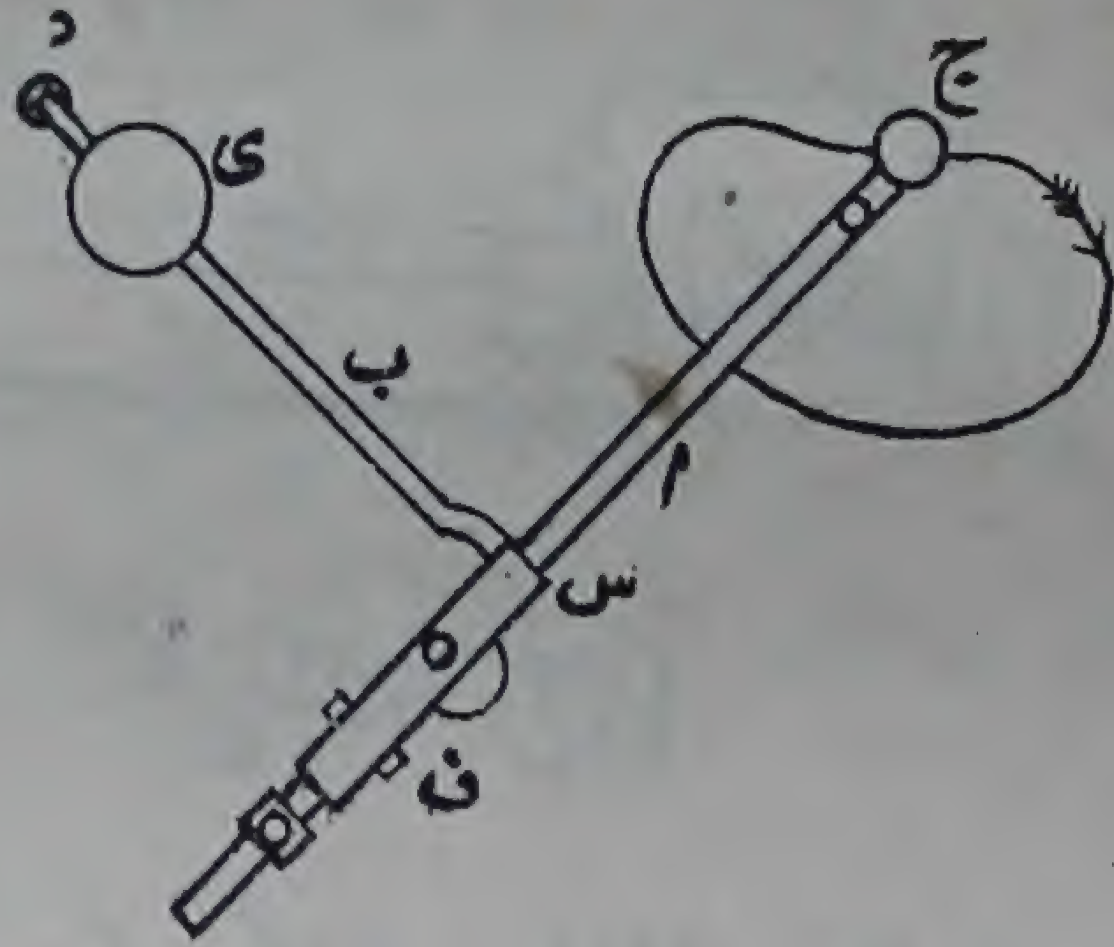
ایک دُوسری شکل بناؤ جس میں برابر برابر فاصلے سے مختلف ارتفاع کے حدّد ہوں جیسا کہ شکل ۳ (صفحہ ۱۱) میں دکھایا گیا ہے۔ اِس کا رقبہ انحرافی قاعدے سے معلوم کرو :۔

رقبہ = $ا\left\{\frac{ب_۰ + ب_۵}{۲} + ب_۲ + ب_۳ + ب_۴\right\}$ (صفحہ ۱۱)

خانہ دار کاغذ اور وزن کے ذریعہ نتائج کی تصدیق کرو۔

سطح پیما۔

رقبوں کی پیمائش سطح پیما کے ذریعہ بھی کی جا سکتی ہے (شکل ۲۱)۔ یہ آلہ ایک

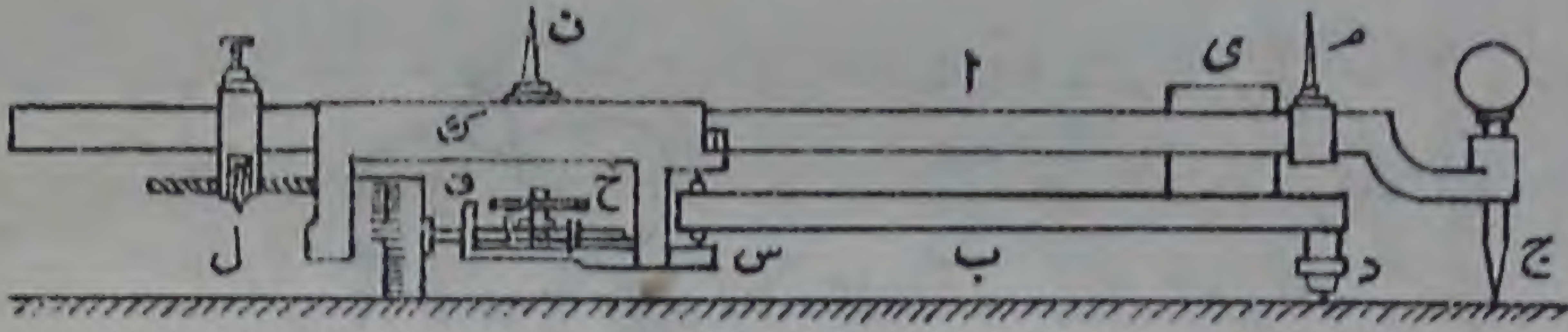


شکل ۲۱۔ سطح پیما بہ حالتِ استعمال

سلاخ ا پر مشتمل ہے جس میں س پر ایک اور سلاخ ب نصب ہے تا کہ دونوں سلاخیں ایک مستوی میں اضافی حرکتیں کر سکیں۔ سُلاخ ب ایک سُوئی کے گرد جو نقطہ د پر کاغذ میں چُبھو دی جاتی ہے گھُوم سکتی ہے اور وہ ی پر وزنی کر دی گئی ہے۔ ا ایک پہیئے ف پر قائم ہے جس میں ج پر خط کھینچنے والی ایک ایک سُوئی لگی ہے جو رقبہ زیرِ پیمائش کے حدود پر گھوم سکتی ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ رقبہ تناسب ہوگا س اور ج کے درمیانی فاصلے اور اُس فاصلے کے حاصلِ ضرب کے جو پہیہ ف کا محیط طے کرتا ہے جب کہ ج کو رقبہ کے حدود پر کامل گشت کرایا جائے۔

شکل ۲۲ میں آلہ ذرا تفصیل سے دکھایا گیا ہے۔ یہ معلوم ہو گیا ہوگا کہ پہیئے پر اِس کے محیط کے چاروں طرف ایک پیمانہ کندہ ہے۔ اِس پیمانہ پر ۱۰۰ درجے ہیں اور ایک کسر پیما کی مدد سے پیمانے کے درجے کے دسویں حصہ تک پڑھا جا سکتا ہے۔ ایک چھوٹا نمائندہ پہیہ ح جو ف کی وجہ سے حرکت میں آتا ہے ف کے پُورے پُورے چکّروں کو شمار کرتا ہے۔

ف، ح، اور جوڑ س ایک چوکھٹے ک میں لگے ہوئے ہیں جس کو سلاخ ا پر جہاں چاہیں نصب کر دیں۔ ایک خفیف حرکت پیچ ل کی بدولت فاصلہ



شکل ۲۳۔ سطح پیما

س ج کو بآسانی دریافت کر سکتے ہیں۔ نمائندے م اور ن سلاخ ا اور چوکھٹے ک پر اس طرح نصب ہیں کہ ان کا درمیانی فاصلہ س ج کے مساوی ہو۔ ا پر ایسے نشانات ہیں جن سے ک کی وضعیں متعین کی جا سکتی ہیں تاکہ رقبہ مربع سنٹی میٹر یا مربع انچوں میں پیمائش کیا جا سکے۔

آلے کو نقشہ کشی کے اتنے بڑے تختے پر استعمال کرنا چاہیئے کہ پہیہ ف کی تمام حرکتیں کاغذ سے باہر ہوئے بغیر پُوری ہو سکیں۔ کاغذ کی سطح نہ تو بہت چکنی ہو جس سے سُوئی پھسل جائے اور پھر پہیہ کی حرکت میں فرق واقع ہو اور نہ بہت کھُردری ہونا چاہیئے۔ بہترین صورت یہ ہے کہ ابتدائی وضع ایسی اختیار کرنا چاہیئے کہ بازو ا اور ب ایک دُوسرے پر قریب قریب علی القوائم ہوں۔ خط کھینچنے والی سُوئی ج کو سمت ساعت میں حدود کے اطراف پھرانا چاہیئے۔

تجربہ ۱۰ — سطح پیما کا استعمال:-

کاغذ پر ایک دائرہ ۱۰ سمر قُطر کا کھینچو۔ سطح پیما کو مربع سمر کی پیمائش کے لئے لگا دو۔ پھر اس کو کاغذ پر رکھو اور سُوئی ج کو دائرے کے محیط کے کسی نقطہ پر رکھو۔ پہیہ ف کو صفر پر لے آؤ۔ ہوشیاری سے سُوئی ج کو محیط کے گرد پھرا کر اسی نقطہ پر لے آؤ۔ پیمانے اور کسر پیما کو پڑھو اور لکھ لو۔ سُوئی کو دوبارہ اور سہ بارہ پھراؤ۔

اور ہر مرتبہ جب نقطے پر پہنچو تو پیمانے اور کسر پیما کو پڑھ کر لکھ لو۔ فرق نکالو اور رقبہ کی تین قیمتیں معلوم کرو۔ اِن قیمتوں کو آپس میں بہت کچھ متفق ہونا چاہئے۔

دائرے کا رقبہ ذیل کے ضابطے سے نکالو۔

رقبہ = ۲۲ ن۲ مربع سمر

جہاں ن سمر میں دائرے کا نصف قطر ہے۔ اِس حاصل شدہ رقبہ کا سطح پیما کے ذریعہ حاصل کردہ اوسط رقبے سے مقابلہ کرو۔

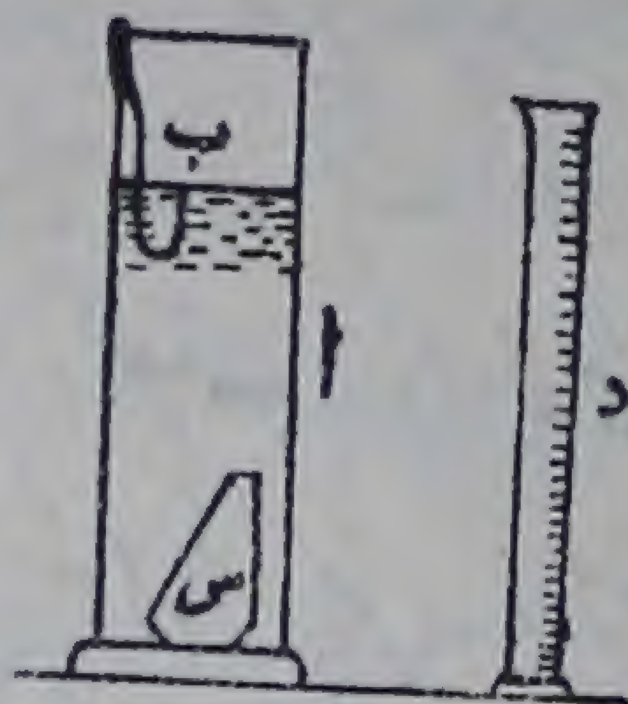
نقشہ کشی کے کاغذ پر ایک شکل مثل شکل ۴ صفحہ ۱۱ کھینچو۔ اِس کو انتصاباً برابر برابر فاصلے سے طاق معیّن کھینچکر تقسیم کرو۔ اِس کا رقبہ سمپسن[1] کے قاعدے سے اندازہ یعنی

رقبہ = ل/۳ (ب۱ + ۴ب۲ + ۲ب۳ + ۴ب۴ + ۲ب۵ + ۴ب۶ + ب۷) صفحہ ۱۱

سطح پیما کے ذریعہ سے اِس نتیجے کی تصدیق کرو۔

تجربہ ۱۱ — پانی کے ہٹاؤ سے حجم کی پیمائش :-

شکل ۲۳ میں ا ایک اُستوانی ہے جس میں ایک کانٹا ب لگا ہُوا ہے۔ یہ کانٹا محض ایک تار ہے جسکو اس شکل میں موڑ دیا ہے اور اُستوانی کے بازو میں لگا دیا ہے۔ یہ پانی کے استواء کو صحیح طریقہ سے معلوم کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔



شکل ۲۳۔ حجم ہٹاؤ کے ذریعہ سے

س ایک شئے ہے جس کا حجم دریافت طلب ہے۔ د ایک درجہ دار اُستوانی ہے جس کے پہلو پر مکعب سنتی میتروں میں ایک پیمانہ کندہ ہے۔ پہلے پانی اِس انداز سے ڈالو کہ کانٹا پانی کی سطح کو چھوتا نظر آئے۔ پھر ایک باریک تاگے کے ذریعہ سے شئے کو اُستوانی میں داخل کرو۔ اور نالچہ کے ذریعہ سے زائد پانی نکال لو تاکہ سطح پھر کانٹے تک آ جائے۔ جتنا پانی بھی نالچہ کے ذریعہ علیحدہ کیا جائے وہ سب کا سب درجہ دار

[1] Simpson

اُستوانی میں داخل کردو۔ اِس پانی کا حجم پیمانے پر پڑھو اور درج کرلو۔ ظاہر ہے کہ یہ حجم شے کے حجم کے مساوی ہے۔

اِس طریقہ سے تجربہ ۲ء میں بعض بڑے جسموں کے حاصل کردہ حجموں کی تصدیق کرو۔ اِس طریقہ کو کافی صحت کے ساتھ چھوٹی چیزوں کے حجم دریافت کرنے کے لئے نہیں استعمال کیا جا سکتا کیونکہ ایسی صورت میں پانی کے استواء میں فرق بالکل غیر محسوس ہوگا۔

دوسری فصل کی مشقیں

(۱) ایک پیمانہ اِنچ کے بیسوؤں میں منقسم ہے اور اِس پیمانہ سے ایک نشان کے پچیسویں تک ایک کسر پیما کی مدد سے پڑھنا ہے۔ شکل دے کر سمجھاؤ کہ کوئی مناسب پیش خواں کسر پیما کیسے بنایا جائے، نیز پس خواں کسر پیما کیسے بنیگا۔

(۲) زاویہ کی پیمائش کے آلے کا دائرہ درجوں میں منقسم ہے اور ہر درجہ چھ برابر حصّوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ بتلاؤ کہ ایک پیش خواں کسر پیما کیوں کر بنایا جائے کہ زاویہ دقیقہ کے قریب قریب ثلث تک پیمائش کیا جا سکے، شکلیں بھی بناؤ۔

(۳) ایک خُردہ پیما یا پیچدار پیمانے میں ایک پیچ ہے جس میں فی اِنچ پچاس چُوڑیاں ہیں۔ اور خول والے پیمانے پر درجے اِنچ کے پچاسویں تک بنے ہیں۔ اِس آلہ سے قریب قریب اِنچ کے ہزارویں تک پڑھا جا سکتا ہے۔ بتلاؤ کہ ٹوپی والے پیمانے پر کتنے درجے ہیں؟ شکل بنا کر پیمانوں کی وضع دکھلاؤ جب کہ طول ۰.۳۴۷ اِنچ ہو۔

(۴) ایک کُرویت پیما کے پیچ میں ۴۰ چُوڑیاں فی اِنچ ہیں۔ اگر آلہ ۰.۰۰۱ اِنچ تک پڑھ سکتا ہے تو دائری پیمانے پر کتنے نشانات ہونے چاہئیں؟

(۵) کسی کُرویت پیما کے ثابت پائے، ۴ سم ضلع والے مثلث متساوی الاضلاع کے کونوں پر واقع ہیں۔ جب آلے کو کسی کُروی سطح پر رکھا جائے

تو آلے سے ۵،۶۳۷ مم ظاہر ہوتے ہیں پس سطح کا نصف قطرِ انحناء دریافت کرو۔ واضح رہے کہ آلے میں خطاء صفر نہیں ہے۔

(۶) وہی کُرویت پیما جب دُوسری کُروی سطح پر رکھا جاتا ہے تو اس سے ۰،۳۲۹ مم ظاہر ہوتے ہیں پس سطح کا نصف قطرِ انحناء دریافت کرو۔

(۷) ایک خُردہ پیمائی خردبین کے چشمئی پیمانے کی تعییر میں حسبِ ذیل مشاہدات حاصل ہوئے:—

چشمئی پیمانہ	۰	۳۰	۵۰	۸۰	۱۰۰
عمودی پیمانہ مم =	۳۵،۶	۳۳،۶	۳۲،۳	۳۰،۳	۲۹،۰

تو بتلاؤ کہ چشمئی پیمانے کے ایک درجے کی قیمت مم میں کیا ہے؟

(۸) سرل چاپ کی مدد سے کسی مخروطِ ناقص کی پیمائش حسبِ ذیل کی گئی:۔ ارتفاعِ عمودی = ۲،۶۱۲ انچ چھوٹے کنارے کا قطر = ۱،۸۷۶ انچ بڑے کنارے کا قطر = ۲ انچ ہے۔ مخروطِ ناقص کو وزن کیا تو معلوم ہُوا کہ ۲،۲۲ پونڈ ہے۔ پس اس دھات کا وزن پونڈ میں فی مکعب انچ دریافت کرو۔

(۹) بیان کرو کہ اگر کسی دائرے کے محیط اور اُس کے قطر کی نسبت تجربۃً دریافت کرنا ہو تو تم کیا کروگے۔ اگر تم نے کوئی پیچدار پیمانہ استعمال کیا ہے تو اُسے بیان کرو۔ (جامعۂ مدراس)۔

(۱۰) اگر تم نے کوئی سطح پیما استعمال کیا ہے تو شکل بنا کر اس کی ساخت بیان کرو۔ بتلاؤ کہ اگر کسی شکل میں بے قاعدہ اور منحنی حدود ہوں تو اس آلے سے اُس کا رقبہ کیسے دریافت کروگے۔ بتلاؤ کہ کیا کیا احتیاطیں برتنی چاہئیں۔

(۱۱) کسی کُرویت پیما کے پیچ میں بجائے ۲ چُوڑیاں فی ملی میٹر ہونے کے دراصل اس میں ۲۰،۰۱ چُوڑیاں فی سنتی میٹر ہیں۔ دائری پیمانے میں ۵۰۰ درجے ہیں۔ جب شیشے کی مستوی تختی پر رکھا اور درست کیا جائے تو پیمانوں سے

۵ ۰۰۵، ۰ مم ظاہر ہوتے ہیں۔ پھر آلے سے ایک شے کی پیمائش کی جاتی ہے اور پیمانوں سے ۲۶۴۲ء۲ مم پڑھے جاتے ہیں۔ بتلاؤ کہ شئے کی اصلی موٹائی کیا ہے؟

(۱۲) ایک خُردہ پیما ۰۱ء۰ مم تک پڑھ سکتا ہے۔ جب دونوں جبڑے ملا دیئے جاتے ہیں تو نشان ۰۵ء۰ مم ہے۔ آلے سے پھر ایک فولادی گولے کی پیمائش کی گئی تو ایک دُوسرے پر علی القوائم تین سمتوں میں قُطر کی پیمائش حسب ذیل نکلی:-

۲۴ء۵۲ مم، ۲۴ء۵۰ مم، ۲۴ء۵۳ مم

تو گولے کا اوسط قُطر اور نیز اُس کا حجم دریافت کرو۔



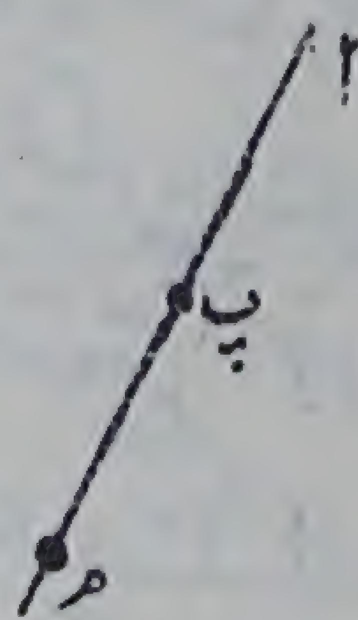
تیسری فصل

نقلِ مکان، رفتار، اِسراع

ایک نقطہ کی حرکت

کسی جسم کی حرکت اور کسی آن اُس کا محل دونوں، چند منتخب خطوط کی اضافت سے، جن کو ہم فضاء میں ثابت مان سکتے ہیں، متعین کیئے جا سکتے ہیں۔ جسم کی حرکت عموماً بہت پیچیدہ ہوتی ہے۔ اِس کے ہر نقطہ کی حرکت تمام لحاظ سے ایک نہیں ہوتی۔ پس حرکت کے مطالعہ کے لئے سہولت اِسی میں ہے کہ ایک نقطہ یا ایک ذرہ کی حرکت دیکھی جائے۔ ذرہ سے مُراد یہ ہے کہ جسم اِس قدر چھوٹا ہو کہ اِس کے حِصّوں کی حرکت کے اختلاف کو ہم نظر انداز کرسکیں۔

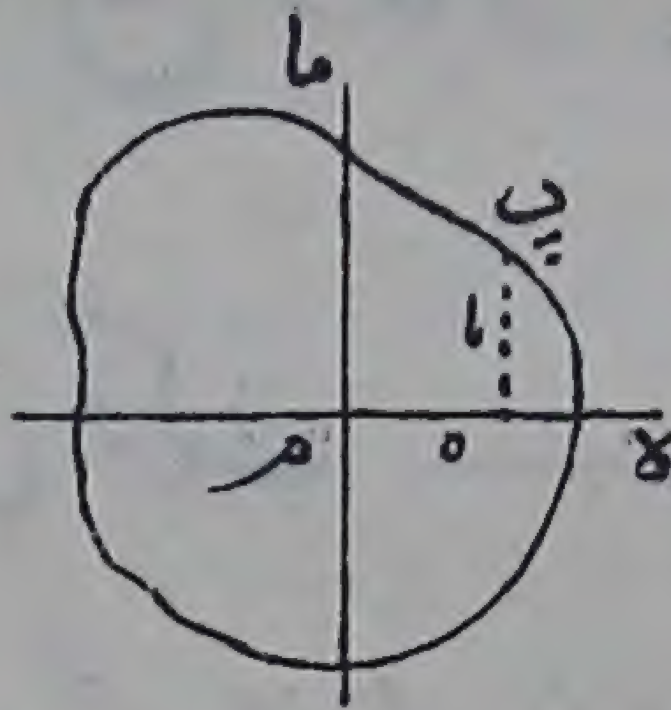
مستقیم حرکت یا ایک خطِ مستقیم میں حرکت کی صورت میں اِس خط کو جس میں کہ نقطہ حرکت کر رہا ہے فضاء میں ثابت مان لینا کافی ہے۔ اگر کوئی نقطہ پ خطِ مستقیم م ا میں حرکت کر رہا ہو، تو کسی آن اِس کی وضع اِس طرح متعین کی جاسکتی ہے کہ خط کے کسی ثابت نقطہ م سے اِس کا فاصلہ م پ بیسان کیا جائے۔ م کو مبداء کہیں گے۔



شکل ۲۴۔ مستقیم حرکت

یک مستوی حرکت میں، کسی دِئے ہوئے مستوی میں جس کو ہم

فضاء میں ثابت مان سکتے ہیں نقطہ حرکت کرنے کے لئے آزاد ہوتا ہے۔ کسی آن، نقطہ کی وضع اور حرکت کو ہم ایک دُوسرے پر علی القوائم دو ایسے ثابت خطوں کی اضافت سے ظاہر کر سکتے ہیں جو حرکت کے مستوی میں واقع ہوں ۔ ایسے خطوط کو محورین محدّد کہتے ہیں ۔ اِس طرح شکل ۲۵ میں کاغذ کے مستوی میں جو فضاء میں ثابت ہے ایک نقطہ پ ایک منحنی بنا رہا ہے ۔ کسی آن اِس



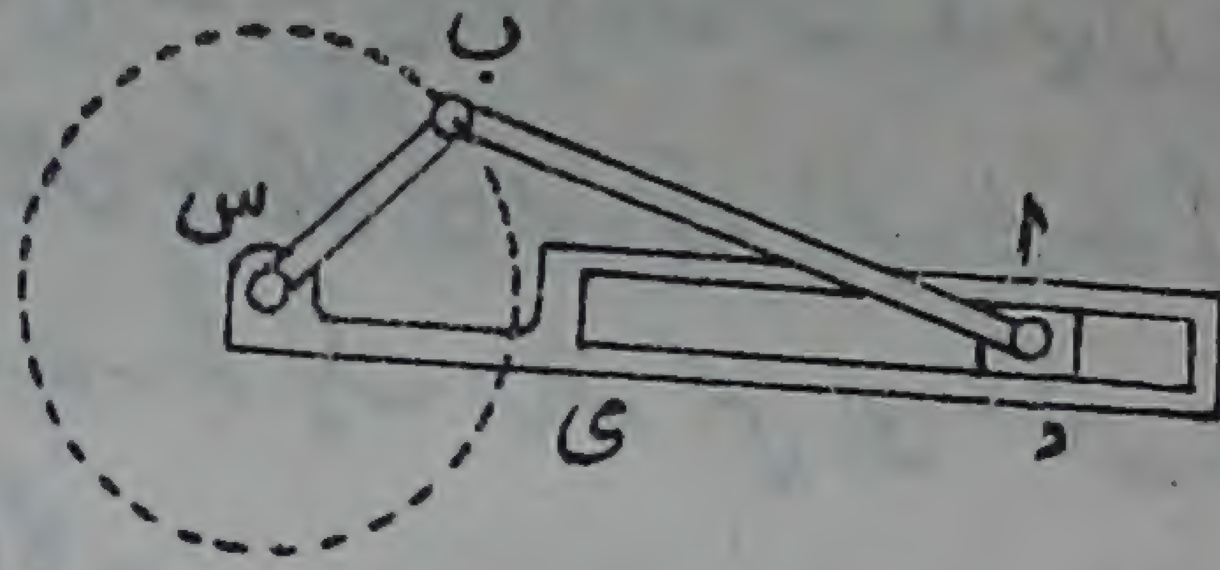
شکل ۲۵۔ مستوی میں حرکت

نقطہ کی صحیح وضع ہر دو محور محدّد م ہ و م ما سے اِس کے عمودی فاصلے ما اور ہ کے معلوم ہونے سے متعین ہو سکتی ہے ۔ یہ لحاظ رہے کہ مبدا م کے گرد کی جگہ کو م ہ و م ما چار خانوں میں تقسیم کر دیتے ہیں ۔ اِس کے لئے مفید قرارداویں یہ ہیں، اگر پ، م ما کے داہنے یا بائیں ہوگا تو ہ مثبت یا منفی ہوگا، اِسی طرح اگر پ، م ہ کے اُوپر یا نیچے ہو تو ما مثبت یا منفی ہوگا۔

حرکت کی پیچیدہ صورتیں اُس وقت پیدا ہوتی ہیں جب کہ حرکت ایک ہی مستوی میں محدود نہ ہو۔ مثلاً، کوئی شخص مرغولہ یا چکّردار زینے پر چڑھ رہا ہو۔ لیکن ایسی صورتیں اِس کتاب کے مبحث سے خارج ہیں۔

مستقیم اور ایک مستوی حرکت کی مثال

شکل ۲۶ میں جو شکل دکھائی گئی ہے اِس میں س ب ایک کرینک (گردانہ) ہے جو س پر ایک محور کے گرد اور کاغذ کے مستوی کے علی القوائم گھوم سکتا ہے ۔ ایک واصل سلاخ اب کرینک سے ب پر ایک سُوئی کے ذریعہ ملی ہوئی ہے

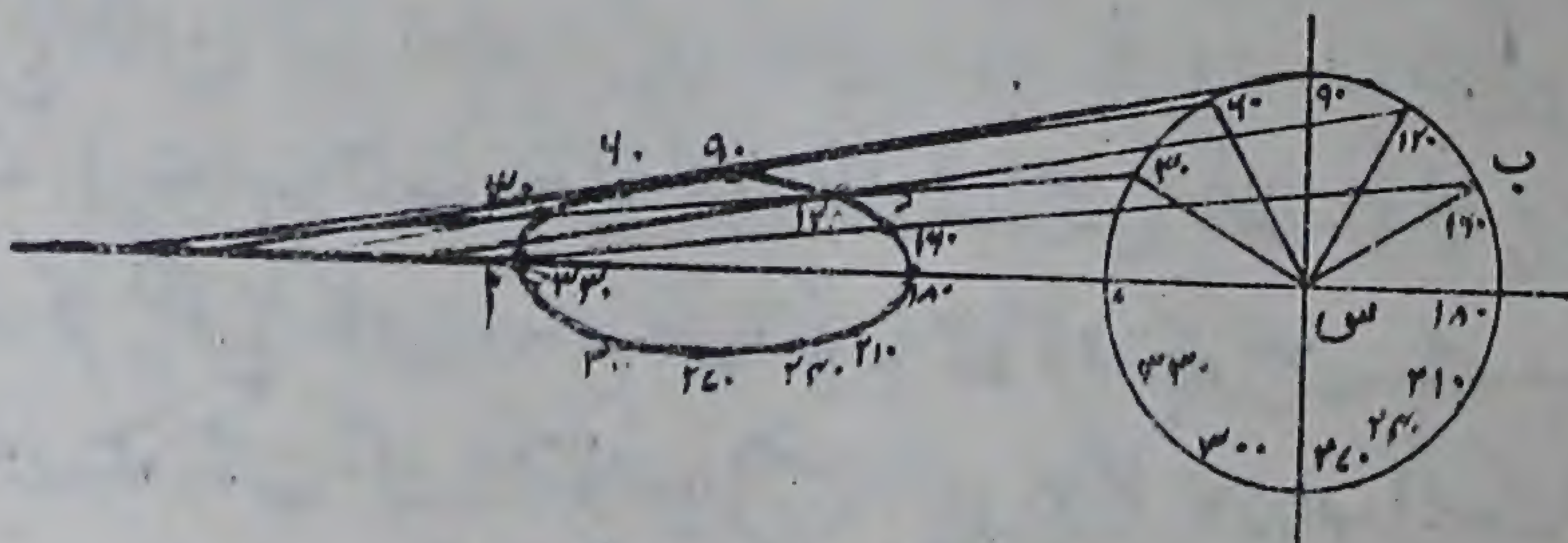


شکل ۲۶ - پھسلواں کرینک

اور نیز ایک کُندے د سے بھی ملحق ہے جو چوکھٹے ی کے ایک شگاف میں حرکت کرسکتا ہے۔ اگر کرینک گھومے تو د کی حرکت شگاف کے اندر خطِ مستقیم میں پیش وپس ہوگی اور ب کی حرکت کاغذ کے مستوی میں دائری ہوگی۔

ایک متحرک نقطہ کا طریق —

مذکورہ بالا اور اِس کے مشابہ کلوں میں کسی آن اگر ایک نقطہ کی وضع دریافت کرنا مقصود ہو تو ریاضی کی مدد سے اِس کو دریافت کرسکتے ہیں۔ عملاً اِس سے مفید تر طریقہ یہ ہے کہ متحرک نقطہ کا **طریق** یا راستہ کھینچا جائے۔ اِس طرح کے طریق سے نقطہ کی تمام وضعیں کل کی جملہ ممکنہ حرکات کے دوران میں ظاہر ہوسکتی ہیں۔ اِس طریقے کی ایک مثال شکل ۲۷ میں دی گئی ہے جس میں شکل ۲۶ کے

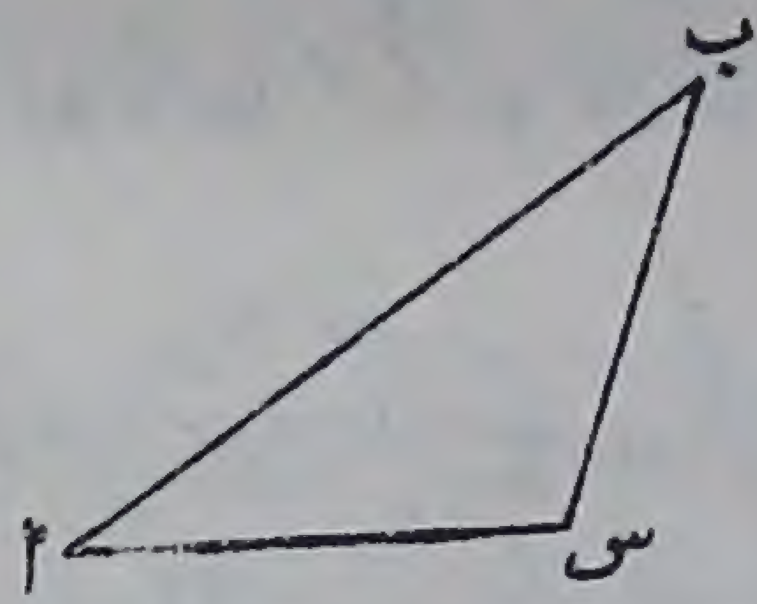


شکل ۲۷ - واصل سلاخ کے ایک نقطہ کا طریق

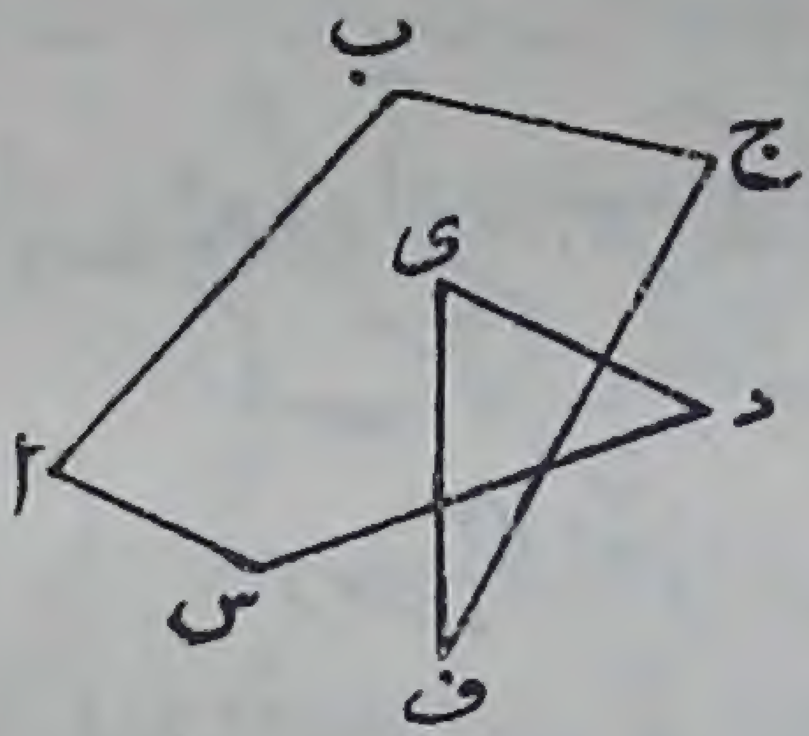
مشابہ ایک کل کی واصل سلاخ کے کسی نقطہ د کا طریق دکھلایا گیا ہے۔ تیس تیس درجے کے فاصلے سے تمام گردش میں کرینک س ب کی مختلف وضعوں پر اس کے اور واصل سلاخ اب کے خاکے بنائے گئے ہیں۔ [وضاحت کے خیال سے شکل ۲۷ میں خط س ا سے اوپر ہی کی وضعیں دکھلائی گئی ہیں]۔ اب پر د کی وضع احتیاط کے ساتھ ہر نقشہ میں بنائی جاتی ہے۔ اگر ایک صاف منحنی ان نقطوں میں سے گزرتا ہوا بنایا جائے تو وہی مطلوبہ طریق ہوگا۔

نقلِ مکان :-

فرض کرو کہ کسی آن ایک نقطہ کی وضع ا ہے (شکل ۲۸)۔ اور



شکل ۲۸ ـ نقولِ مکانی کا مثلث



شکل ۲۹ ـ نقولِ مکان کا کثیر الاضلاع

کسی دوسری آن اُسی کی وضع ب ہے۔ خط مستقیم اب کھینچو۔ اب نقطہ کا نقلِ مکان کہلاتا ہے۔ اس تعریف کے لئے وہ راستہ جس کو نقطہ طے کر کے ا سے ب تک پہونچا کوئی اہمیت نہیں رکھتا۔ مثلاً یہ ہو سکتا ہے کہ نقطہ کا نقلِ مکان ا سے س تک ہو، اور پھر س سے ب تک۔ اس صورت میں بھی اختلافِ وضع وہی ہوگا جو براہِ راست ا سے ب تک آنے میں ہوتا۔ پس ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقلِ مکان اب ہر دو نقولِ مکانی ا س، س ب کے مساوی ہے۔ اب کو حاصل نقل کہتے ہیں

اور ا س اور س ب جزئی نقول ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ جزئی نقول کی تعداد غیر محدود ہے ۔ چنانچہ شکل ۲۹ میں اگر یکے بعد دیگرے اجزاء ا س، س د، د ی، ی ف، ف ج اور ج ب نقطہ پر عمل پیرا ہوں تو یہ سب حاصلِ نقل ا ب کے مساوی ہونگے۔

نقل کا تعین

نقل مکانی بیان کرتے وقت ضروری ہے کہ :-

(۱) ابتدائی وضع۔

(۲) اُس خط کی سمت جس میں نقطہ حرکت کر رہا ہے۔

(۳) حرکت کی جہت یعنی یہ کہ آیا ا سے ب کی جانب (شکل ۲۸) یا اِس کے خلاف۔

(۴) نقل مکانی کی مقدار معلوم ہونا چاہئے۔

جہت ظاہر کرنے کے لئے ابتدائی اور آخری وضعوں کو ظاہر کرنے والے حروف کی ترتیب سے مدد لی جاسکتی ہے۔ جیسے ا ب یا ب ا یا خط پر ایک تیر بنا دیا جائے۔

سمتی اور میزانی مقداریں

ہر وہ طبیعیاتی مقدار جس کی تعیین کے لئے سمت کے بیان کرنے کی ضرورت ہے سمتی مقدار کہلاتی ہے۔ دیگر مقداریں میزانی مقداریں کہلاتی ہیں۔ نقلِ مکان اور قوت سمتی مقداروں کی مثالیں ہیں۔ کمیت، کثافت اور حجم میزانی مقداریں ہیں۔ ہر سمتی مقدار کو مناسب سمت اور جہت میں ایک خطِ مستقیم سے تعبیر کرسکتے ہیں۔

شکل ۲۸ و ۲۹ میں جو عمل دکھائے گئے ہیں وہ سمتیوں کے جمع کرنے کی مثالیں ہیں۔ عمل کی صورت یہ ہے کہ ایک شکل بناتے ہیں جس میں ایک خطِ مستقیم ابتدائی وضع سے کھینچا جاتا ہے جس سے پہلی سمتی ظاہر ہوتی ہے۔ اِس خط کا طول اِتنا ہو جاتا ہے کہ پیمانہ کا

لحاظ کرتے ہوئے وہ مقدار کی قدر کو ظاہر کرتا ہے۔ اور یہ خط مناسب سمت اور جہت میں بھی ہوتا ہے۔ پہلی وضع سے دُور، اِس خط کے دُوسرے کنارے سے ایک اور خط اِسی طرح کھینچا جاتا ہے جو دُوسری سمتی کو ظاہر کرتا ہے۔ اِسی طرح یہ عمل جاری رہتا ہے تا آں کہ جملہ اجزاء ختم ہو جائیں۔ حاصل سمتی اُس خط سے تعبیر ہوگا جو ابتدائی وضع سے کھینچا جائے تاکہ پوری شکل ایک بند کثیر الاضلاع بن جائے۔

شکل ۲۸ جس میں صرف دو جُزئی سمتی ہیں **نقول مکانی کا مثلث** کہلاتی ہے اور شکل ۲۹ **نقولِ مکانی کا کثیر الاضلاع** کہی جا سکتی ہے۔

رفتار

کسی متحرک نقطہ کی رفتار سے مُراد کسی خاص سمت میں تبدیلِ وضع کی شرح ہے۔ رفتار بیان کرتے وقت، مدت حرکت، طے شدہ فاصلہ اور سمتِ حرکت سب کا لحاظ رکھنا پڑتا ہے۔ رفتار ایک سمتی مقدار ہے۔ اُن صورتوں میں جہاں حرکت کی سمت کا لحاظ نہیں کیا جاتا مسافت کی شرح ظاہر کرنے کے لئے چال کی اصطلاح استعمال کی جاتی ہے۔

رفتار اِس حالت میں یکساں کہلاتی ہے جب کہ نقطۂ وقت کے مساوی وقفوں میں مساوی فاصلے طے کرے۔ اگر یہ شرط پُوری نہ ہو تو رفتار متغیر کہلاتی ہے۔

کسی آن ایک نقطہ کی رفتار کا اندازہ جب کہ رفتار یکساں ہو اِس طرح ہو سکتا ہے کہ اکائی وقت میں طے شدہ فاصلہ معلوم ہو۔ پس اگر کُل فاصلہ ف، و ثانیوں میں طے ہُوا ہو تو کسی آن رفتار ر کی قدر حسبِ ذیل ہے:-

$$ر = \frac{ف}{و} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

یہ سنتی میٹر فی ثانیہ یا فُٹ فی ثانیہ ہوگی اگر ف سنتی میٹر یا فُٹ میں ہوگا۔ (۱) کی رُو سے رفتار کا تشخص اِس طرح مکمل ہو جاتا ہے کہ

اِس خط کی سمت بتلائی جائے جس میں حرکت واقع ہے نیز اس خط پر حرکت کی جہت بھی معلوم ہو۔

رفتارِ متغیر کی صورت میں مساوات (۱) کا نتیجہ وقفۂ وقت و میں رفتار کی اوسط قیمت ہے۔ چنانچہ ایک ریل گاڑی کی اوسط رفتار جب کہ وہ ۸ گھنٹے میں ۴۰۰ میل کا مجموعی فاصلہ طے کرے (اس میں قیام بھی شامل ہے) $\frac{۴۰۰}{۸}$ یا ۵۰ میل فی گھنٹہ ہے۔

رفتار کے ابعاد $\frac{ط}{و}$ ہیں۔

اگر ایک نقطہ متغیر رفتار سے رواں ہے تو کسی آن اُس کی رفتار کا اندازہ اس فاصلے سے ہو سکتا ہے جو نقطہ مابعد کے ثانیہ میں طے کرتا اگر آن زیرِ بحث میں اُس کی رفتار مستقل رہتی۔

اسراع:۔

اسراع سے مُراد رفتار کی تبدیلی کی شرح ہے۔ اِس میں رفتار کی تبدیلی اور نیز اس وقفۂ وقت کی تبدیلی، جس میں یہ تبدیلی پیدا ہوئی ہے، دونوں شامل ہیں۔ اسراع کا اندازہ اِکائی وقت میں رفتار کی تبدیلی سے ہوتا ہے۔ کسی ذرّے میں اِکائی اسراع اُس وقت ہوتا ہے جب کہ اِکائی وقت میں رفتار میں اِکائی تبدیلی واقع ہو۔

مثال:۔ کسی آن ایک ذرّے میں جس کی حرکت مستقیم ہے ۲۵ سمر فی ثانیہ کی رفتار ہے۔ مابعد کے ۵ ثانیوں میں رفتار یکساں طور پر بڑھ کر ۶۰ سمر فی ثانیہ تک پہونچ جاتی ہے، تو اسراع دریافت کرو۔

۵ ثانیوں میں رفتار میں اضافہ = ۶۰ − ۲۵ = ۳۵ سمر فی ثانیہ

۱ ثانیہ " " " " = $\frac{۳۵}{۵}$ = ۷ " " "

پس اسراع ۷ سمر فی ثانیہ ہر ثانیے میں ہے۔ یا جیسے عام طور پر لکھا جاتا ہے ۷ سمر فی ثانیہ فی ثانیہ یا $\frac{\text{۷ سمر}}{\text{ثانیہ}^{2}}$ ہے۔

یہ معلوم ہوا ہوگا کہ کسی معین اسراع کے بیان کرنے میں وقت کا ذکر دو مرتبہ کیا جاتا ہے۔ ایک مرتبہ تو رفتار کی تبدیلی ظاہر کرنے کے لئے

اور دُوسری مرتبہ اُس وقفۂ وقت کو ظاہر کرنے کے لئے جس میں یہ تبدیلی واقع ہوئی ہے۔

اگر وقت کے مساوی وقفوں میں رفتار میں مساوی تبدیلیاں واقع ہوں تو اسراع یکساں ہے ورنہ متغیر۔ یکساں اسراع کی صورت میں کسی آن اسراع کی قیمت رفتار کی مجموعی تبدیلی کو اُس وقت سے جس میں کہ تبدیلی واقع ہوئی ہے، تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اِس طرح متغیر اِسراع کی صورت میں حساب لگایا جائے تو آن زیرِ بحث میں اوسط اِسراع دریافت ہو سکتا ہے۔

چونکہ اِسراع میں رفتار شامل ہے، اِس لئے اِسراع ایک سمتی مقدار ہے۔ کسی مقررہ اِسراع کے تشخّص کے لئے اِسراع کی قدر، اُس کا خطِ سمت اور اُس خط پر اُس کی جہت بھی معلوم ہونی چاہئے۔

اِسراع کے ابعاد، رفتار کے ابعاد کو وقت سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ یعنی $\frac{ط}{و} \div و = \frac{ط}{و^2}$

نقل مکان، رفتار اور اِسراع کی ترسیم:۔

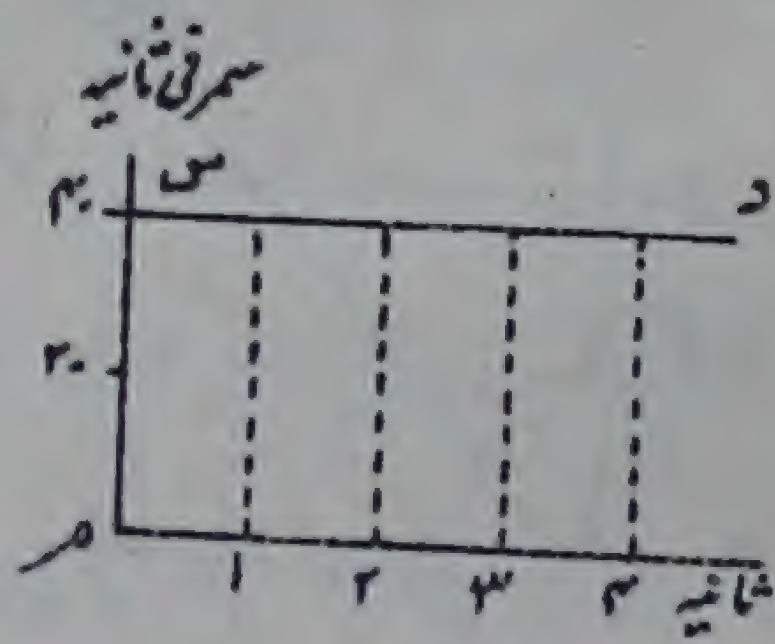
نقل مکان، رفتار، اور اِسراع کے مسائل کے مطالعہ کا سہل طریقہ یہ ہے کہ ایسے ترسیم بنائے جائیں جن میں اِن مقداروں کی قدر مُعین ہوں اور وقت کے وقفے فصلے ہوں۔

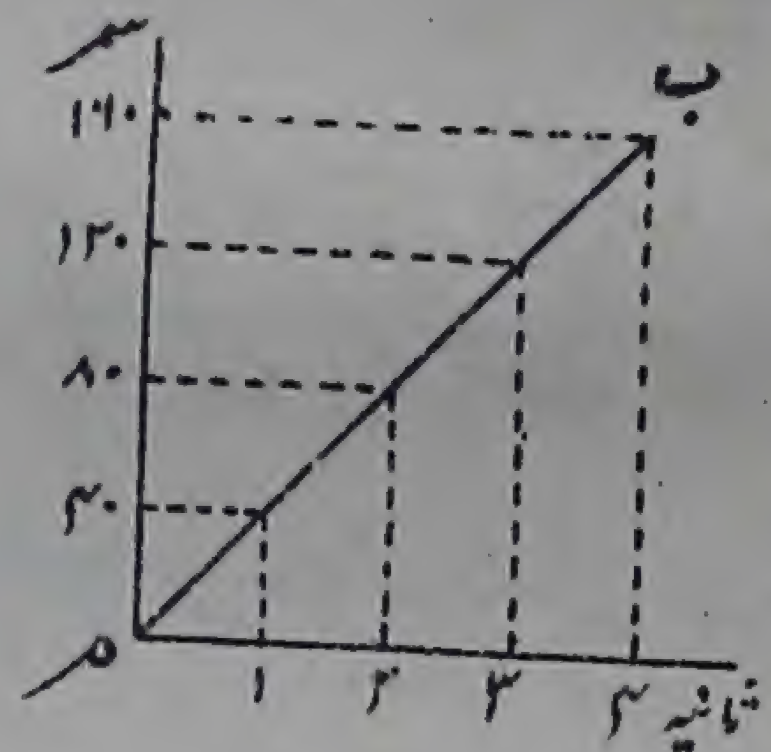
مثال ۱:۔ ایک نقطہ پ جو خطِ مستقیم م ا میں حرکت کرتا ہے کسی آن، مبدا م میں سے گزرتا ہے اور اُس میں ایک یکساں رفتار ۴۰ سم فی ثانیہ کی ہے تو نقل و وقت، اور رفتار و وقت کی ترسیم کرو۔

چونکہ رفتار ر یکساں ہے لہٰذا وقت کے کسی وقفے و ثانیوں میں نقلِ مکان ف = ر و سے حاصل ہوتا ہے۔

وقت و ثانیہ، شمار م سے	۰	۱	۲	۳	۴
فاصلہ ف سم، شمار م سے	۰	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰

اِن عددوں کو اگر حسبِ شکل ۳۰ ترسیم کیا جائے تو ایک مستقیم نقل وقتی ترسیم م ب حاصل ہوگی۔





شکل ۳۱

شکل ۳۰ یکساں رفتار کی ترسیم

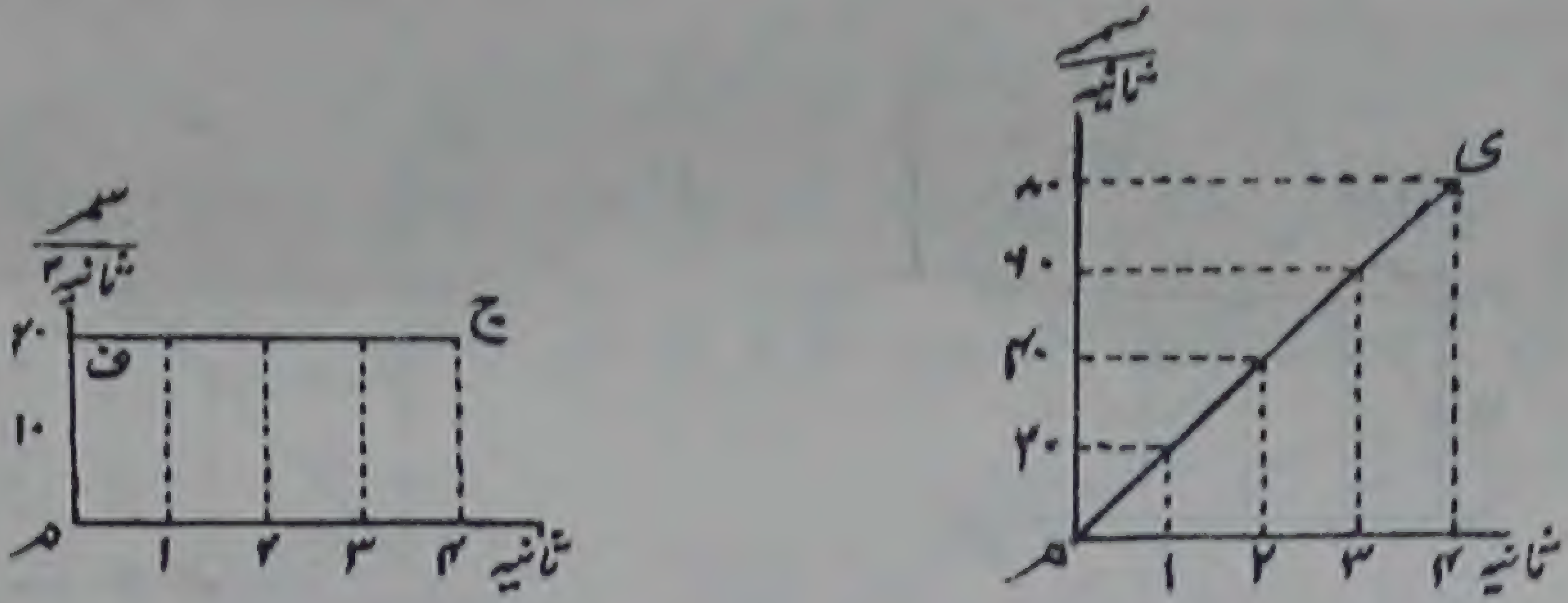
رفتار یکساں ہے لہٰذا رفتار وقتی ترسیم س د وقتی محور کے متوازی ہے (شکل ۳۱)۔ اِس ترسیم میں چونکہ م س مستقل رفتار ر کو ظاہر کرتا ہے اور م ہ وقت و کو ظاہر کرتا ہے اِس لئے مستطیل رقبہ س ہ حاصل ضرب ر و کو ظاہر کرتا ہے اور اِس طرح وقت و میں نقلِ مکان کو بھی تعبیر کرتا ہے۔

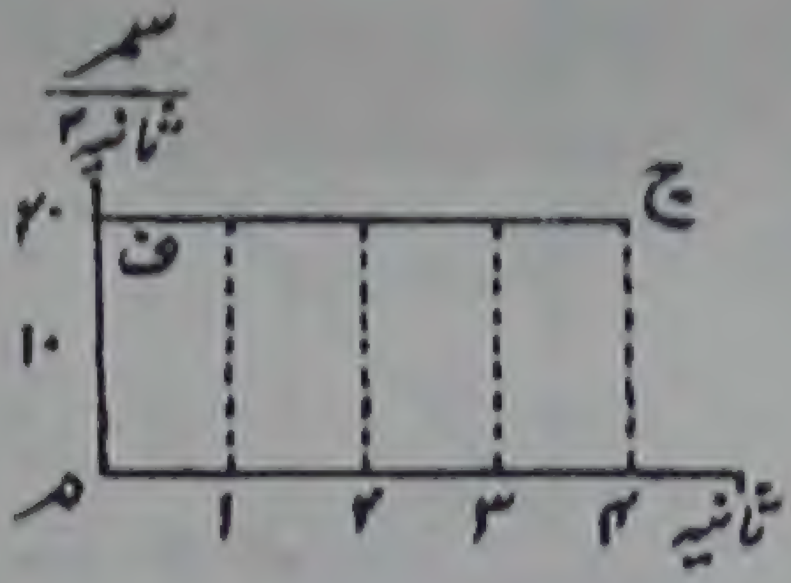
مثال ۲ :- ایک نقطہ پ جو خط مستقیم م ا میں حرکت کرتا ہے، اپنی ابتدائی وضع م پر ساکن ہے اور اُس میں ۲۰ سمر فی ثانیہ فی ثانیہ کا اسراع ہے۔ تو رفتار وقتی، اسراع وقتی اور نقل وقتی ترسیمیں بناؤ۔

یہ ظاہر ہے کہ پہلے ثانیہ کے اختتام پر نقطہ کی رفتار ۲۰ سمر فی ثانیہ ہوگی نیز یہ کہ اِس کی رفتار حرکت کے ہر ثانیہ میں بقدر ۲۰ سمر فی ثانیہ بڑھ جاتی ہے۔ پس کسی وقفۂ وقت و ثانیہ کے اختتام پر رفتار ر کی قیمت ر = ۲۰ و سمر فی ثانیہ ہوگی۔

وقت و ثانیہ، شمار م سے	۰	۱	۲	۳	۴
رفتار ر سمر فی ثانیہ، شمار م سے	۰	۲۰	۴۰	۶۰	۸۰

ان عددوں کو حسب شکل ۳۲ ترسیم کرنے سے ایک مستقیم رفتار وقتی ترسیم م ی حاصل ہوتی ہے۔





شکل ۳۲ شکل ۳۳

مستقل اسراع کی ترسیم آغاز بہ سکون

اِسراع وقتی ترسیم شکل ۳۳ میں دکھائی گئی ہے۔ چونکہ اِسراع یکساں ہے پس معلوم ہؤا کہ ترسیم ف ج وقتی محور کے متوازی ہے۔

وقت کے کسی وقفے میں نقلِ مکان، وقفہ کے درمیان اوسط رفتار اور وقفۂ وقت کے حاصلِ ضرب کے مساوی ہے۔ چنانچہ اگر رَ و ثانیوں کی ایک مدت میں اوسط رفتار سمر فی ثانیہ میں ہو تو نقلِ مکان ف حاصل ضرب رَ و کے مساوی ہے۔

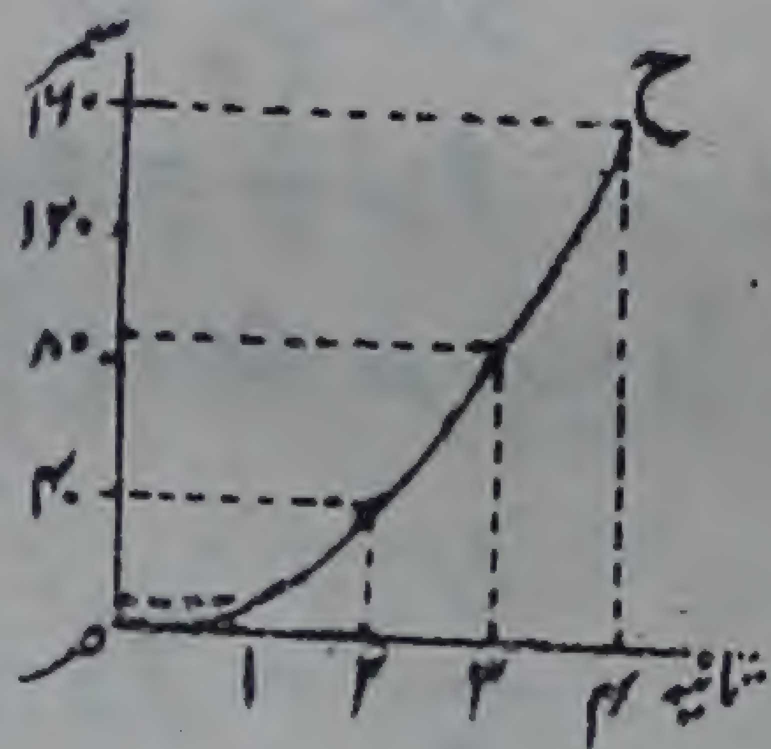
مثلاً جب نقطہ مبداء پر ہے تو رفتار صفر ہے۔ اور پہلے تین ثانیوں کے اختتام پر رفتار ۶۰ سمر فی ثانیہ ہے (شکل ۳۲)۔ پس پہلے تین ثانیوں میں اوسط رفتار حسبِ ذیل ہے:-

$$\text{رَ} = \frac{۰ + ۶۰}{۲} = ۳۰ \text{ سمر فی ثانیہ}$$

اور ف = ۳۰ × ۳ = ۹۰ سمر پہلے تین ثانیوں میں

وقفۂ وقت ثانیوں میں شمار حر سے	۰	۱	۲	۳	۴
ر ط وقفۂ وقت میں سمر فی ثانیہ	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
نقلِ مکان وقفہ میں سمر	۰	۱۰	۴۰	۹۰	۱۶۰

اب نقلِ مکان اور وقت کو حسب شکل ۳۴ ترسیم کرنے سے منحنی ترسیم م ح حاصل ہوتی ہے جو نقلِ مکان اور وقت کے علاقے کو ظاہر کرتی ہے۔



شکل ۳۴ ۔ نقلِ مکان کی ترسیم

متعلم نے یہ دیکھا ہوگا کہ شکل ۳۲ میں کسی وقفہ میں جو رفتار ظاہر کی گئی ہے وہ یہاں ترسیم کے اِس حصّہ کی اوسط بلندی سے ظاہر کی گئی ہے جو وقفہ کے ابتداء اور اختتام کے معینوں سے محدود ہے ۔ اِن معینوں کے پایوں کا درمیانی فاصلہ وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ پس ترسیم کا رقبہ اوسط رفتار اور وقت کے حاصلِ ضرب کو ظاہر کرتا ہے اور اِس لئے اِس وقفہ میں نقلِ مکان کو تعبیر کرتا ہے۔

مستقیم حرکت کی مساواتیں :-

ذیل کی مساواتیں مساوی صورتوں کے لئے ہیں جو اکثر پیش آتی ہیں۔

اور یہ سب رفتار وقتی ترسیم سے ماخوذ ہیں۔

پہلی صورت :۔ رفتار یکساں ——— یہ صورت صفحہ (۴۴) پر گزر چکی ہے۔اس صورت کے لئے ذیل کی مساوات حاصل ہوئی تھی :۔

$$\text{ف} = \text{ر}\ \text{و} \qquad \text{(۱)}$$

دوسری صورت :۔ یکساں اِسراع، آغاز بہ سکون۔

فرض کرد اسراع ع ہے۔ پہلے ثانیہ کے اختتام پر رفتار ع ہوگی، اور ہر مابعد کے ثانیہ میں ع کے مساوی رفتار اضافہ ہوتی جائیگی (شکل ۳۵)۔پس و ثانیہ کے بعد

$$\text{ر} = \text{ع}\ \text{و} \qquad \text{(۲)}$$

پہلے و ثانیوں میں اوسطِ رفتار

$$\bar{\text{ر}} = \tfrac{1}{2}\,\text{ر} = \tfrac{1}{2}\,\text{ع}\ \text{و} \qquad \text{(۳)}$$

اِس پہلے و ثانیوں میں نقلِ مکان

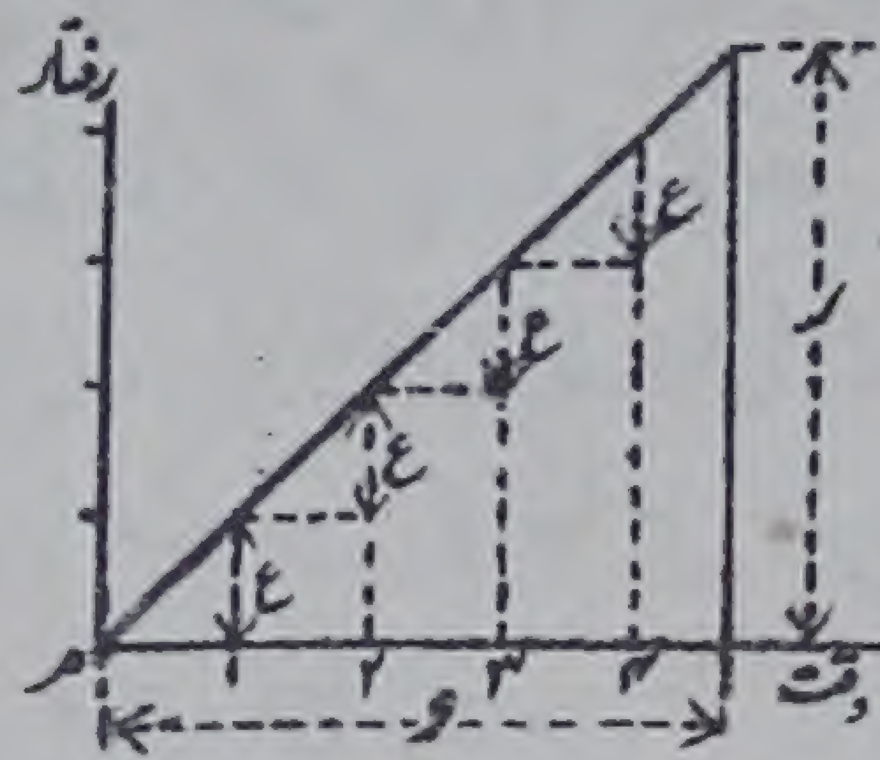
$$\text{ف} = \bar{\text{ر}}\ \text{و} = \tfrac{1}{2}\,\text{ر}\ \text{و} \qquad \text{(۴)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ع}\ \text{و} \times \text{و} = \tfrac{1}{2}\,\text{ع}\ \text{و}^2 \qquad \text{(۵)}$$

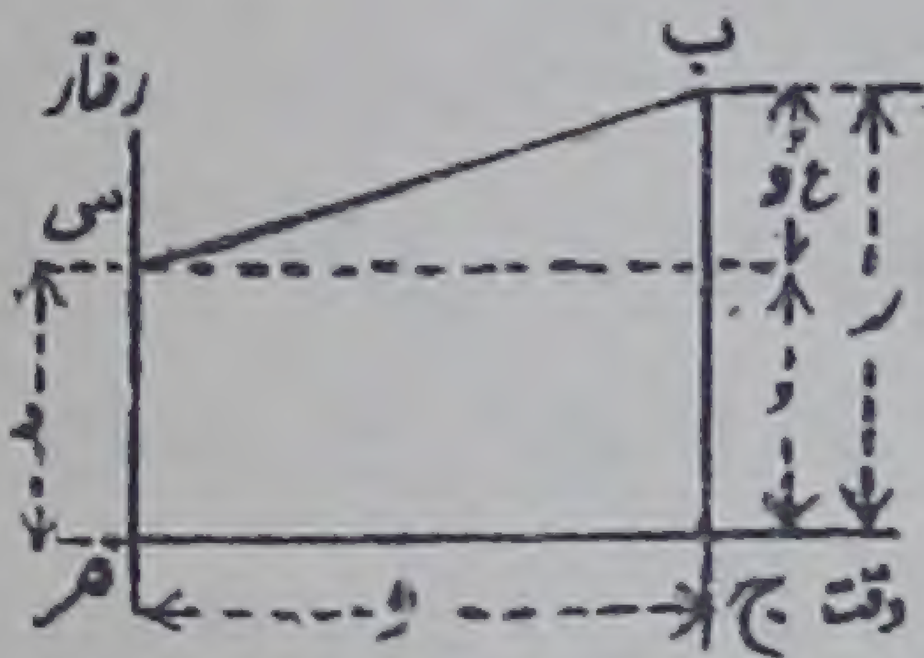
(۲) سے $\text{و} = \frac{\text{ر}}{\text{ع}}$ یا $\text{و}^2 = \frac{\text{ر}^2}{\text{ع}^2}$

(۵) میں درج کرنے سے، $\text{ف} = \tfrac{1}{2}\,\text{ع} \cdot \frac{\text{ر}^2}{\text{ع}^2} = \frac{\text{ر}^2}{2\,\text{ع}}$

$$\text{یا}\quad \text{ر}^2 = 2\,\text{ع}\ \text{ف} \qquad \text{(۶)}$$



شکل ۳۵۔ یکساں اسراع، آغاز بہ سکون



شکل ۳۶۔ یکساں اسراع، آغاز بہ رفتار د

تیسری صورت:- یکساں اِسراع، ابتدائی وضع سے آغاز بہ رفتار د — رفتار وقتی ترسیم شکل ع ۳۶ میں دی گئی ہے۔ چونکہ ابتدائی رفتار د ہے اور ہر ثانیہ کے دَوران میں ع کے مساوی رفتار اضافہ ہوتی ہے اِس لئے و ثانیہ کے بعد رفتار

$$ر = د + ع\,و$$

$$\text{یا}\quad ر - د = ع\,و \quad\cdots\cdots(۷)$$

شکل ع ۳۶ میں ب ج سے ر کی تعبیر ہوتی ہے اور حرس سے د کی۔ پہلے و ثانیوں میں اوسط رفتار

$$ر_{ط} = \frac{د + ر}{۲} = \frac{د + د + ع\,و}{۲}$$

$$\therefore\quad ر_{ط} = د + \tfrac{۱}{۲} ع\,و \quad\cdots\cdots(۸)$$

پہلے و ثانیوں میں اوسط رفتار

$$ف = ر_{ط}\,و = (د + \tfrac{۱}{۲} ع\,و)\,و$$

$$\therefore\quad ف = د\,و + \tfrac{۱}{۲} ع\,و^{۲} \quad\cdots\cdots(۹)$$

واضح رہے کہ (۹) میں پہلی رقم سے وہ نقلِ مکان حاصل ہوگا جو رفتار د کے برابر یکساں رہنے سے ہوتا۔ دُوسری رقم سے وہ نقلِ مکان حاصل ہوتا ہے جو نقطے کے حالتِ سکون سے یکساں اِسراع ع کے ساتھ ظہور میں آتا۔

$$(۷)\ \text{سے}\quad و = \frac{ر - د}{ع}\quad \text{یا}\quad و^{۲} = \frac{(ر - د)^{۲}}{ع^{۲}}$$

$$(۹)\ \text{میں درج کرنے سے،}\quad ف = د\left(\frac{ر - د}{ع}\right) + \tfrac{۱}{۲} ع \frac{(ر - د)^{۲}}{ع^{۲}}$$

$$= \frac{ر\,د - د^{۲}}{ع} + \frac{ر^{۲} + د^{۲} - ۲\,ر\,د}{۲\,ع}$$

$$= \frac{۲\,ر\,د - ۲\,د^{۲} + ر^{۲} + د^{۲} - ۲\,ر\,د}{۲\,ع}$$

$$= \frac{ر^{۲} - د^{۲}}{۲\,ع}$$

$$\text{یا}\quad ر^{۲} - د^{۲} = ۲\,ع\,ف \quad\cdots\cdots(۱۰)$$

اِن میں کسی مساوات کے استعمال کے وقت یا توس گ ث یا انگریزی اکائیاں استعمال کرنا چاہئیں:-

ر سمر فی ثانیہ یا فُٹ فی ثانیہ میں۔

ع سمر فی ثانیہ فی ثانیہ یا فُٹ فی ثانیہ فی ثانیہ میں۔

ف سمر یا فُٹ میں۔

و ثانیوں میں۔

آزادانہ گرنے والے اجسام:-

تجربہ شاہد ہے کہ ہر وہ جسم جو تجاذب کے زیرِ اثر آزادانہ گرتا ہے یکساں اسراع رکھتا ہے۔ لفظ آزادانہ سے مُراد یہ ہے کہ کرۂ ہوائی کی مزاحمت دُور کردی گئی ہے یا نظرانداز کردی گئی ہے۔ رمز ج سے آزادانہ گرنے والے جسم کے اسراع کو ظاہر کرتے ہیں۔ مذکورہ بالا دُوسری اور تیسری صورتوں میں جو مساواتیں حاصل ہوئی ہیں اُن میں ع کی جگہ ج اور ف کی جگہ بلندی ب لکھنے سے اِن کو یہاں استعمال کرسکتے ہیں۔ چنانچہ مساوات (۶) اور (۱۰) کی اب یہ صورت ہوگی:-

$$\text{ر}^2 = 2\,\text{ج}\,\text{ب} \qquad \ldots\ldots (\text{ا})$$

$$\text{ر}^2 - \text{د}^2 = 2\,\text{ج}\,\text{ب} \qquad \ldots\ldots (\text{ب})$$

(ا) ایسے جسم کے لئے ہے جو حالتِ سکون سے گرے۔ اور اِس کی مدد سے کسی بلندی ب سے سقوط کے اختتام پر رفتار کی قیمت معلوم ہوسکتی ہے۔ اِسی طرح (ب) اِس صورت کے لئے ہے جب کہ جسم نیچے کی طرف ابتدائی رفتار د سے پھینکا جائے۔ اختتام پر رفتار ر، (ب) کی مدد سے حاصل ہوسکتی ہے۔

ج کی قیمت میں تغیرات:-

زمین کے مختلف حِصّوں میں ج کی قیمت مختلف ہوتی ہے۔ برطانیہ میں ۹۸۱ سمر فی ثانیہ یا ۳۲٫۲ فُٹ فی ثانیہ

فی ثانیہ کی قیمت اکثر حسابات میں استعمال کی جاتی ہے[۱]۔ کسی معیّن جگہ پر ج کی قیمت مرکزِ زمین سے اُس جگہ کے فاصلے پر منحصر ہے۔ بسا اوقات ۴۵° عرض البلد میں سطحِ سمندر پر ج کی قیمت معیاری مانی جاتی ہے۔ دُوسری جگہوں میں یہ قیمت سطحِ سمندر سے بلندی اور عرض البلد دونوں پر منحصر ہوتی ہے۔ عرض البلد ایک موثر ہے بہ سبب (۱) زمین کی شکل کے، جو قطبین پر کسی قدر چپٹی ہے جس کی وجہ سے سطحِ سمندر قطبین پر بمقابلہ خطِ استواء کی سطحِ سمندر کے، مرکزِ زمین سے نزدیک تر ہے۔ (۲) مرکز گریز قوت کے خطِ استواء کے فاصلہ کے ساتھ متغیر ہونے کے۔

فرض کرو، ج۰ = ۴۵° عرض البلد میں سطحِ سمندر پر، ج کی قیمت سمر فی ثانیہ فی ثانیہ

ج = لہ° عرض البلد میں ا میتر ارتفاع پر، ج کی قیمت سمر فی ثانیہ فی ثانیہ۔

تو ج = ج۰ (۱ − ۰٫۰۰۲۶ جم ۲ لہ − ۰٫۰۰۰۰۰۰۲ ا)

علامتوں کے متعلق قرار داد:۔

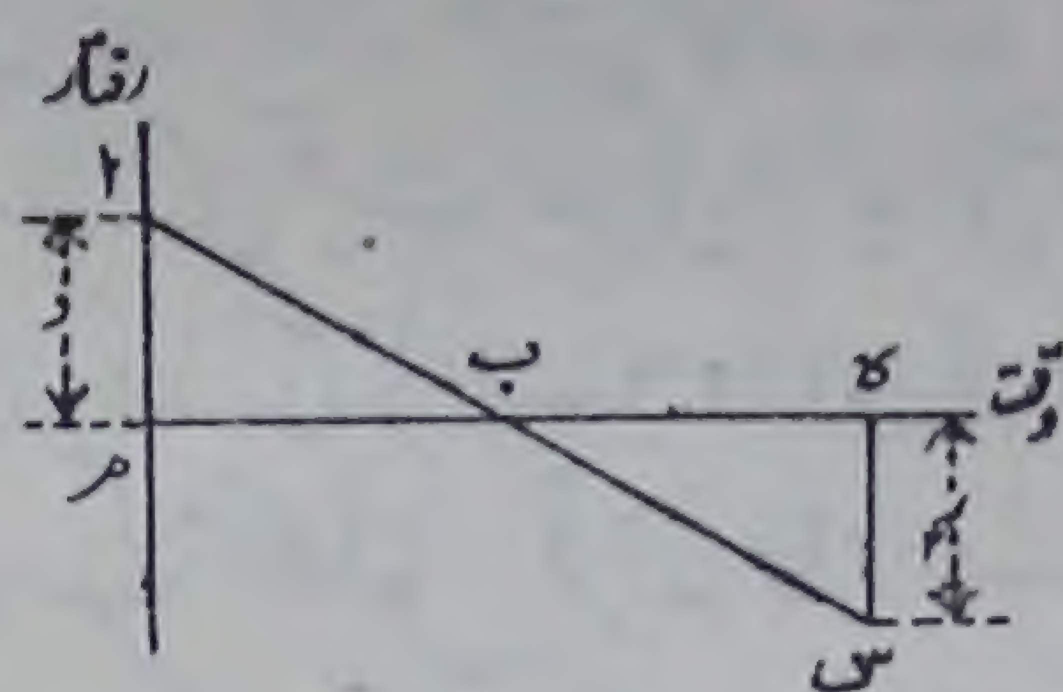
کسی نقطہ پ کی حرکت ایک خطِ مستقیم ا ب میں مطالعہ کرتے وقت سہولت اِس میں ہے کہ ایک جہت مثلاً ا سے ب کی طرف منتخب کر لی جائے اور اِس جہت والی رفتاریں اور اِسراعیں مثبت گردانی جائیں تو اِن کے خلاف جہت والی رفتاریں یا اِسراعیں منفی کہلائینگی۔ اِس قرارداد کی بدولت ایسی صورتوں کی بھی ترسیم ممکن ہے جیسے ایک جسم اُوپر کی طرف پھینکا جائے اور وہ رفتہ رفتہ حالتِ سکون میں آئے اور پھر نیچے گرنے لگے۔

شکل ۳۷ میں اِس صورت کی توضیح میں ایک رفتار وقتی شکل دی گئی ہے جسم اُوپر کی جانب ایک (مثبت) رفتار د کے ساتھ

---

[۱] بلدہ حیدرآباد کے لئے ج کی قیمت ۹۷۸٫۴۴ سمر فی ثانیہ فی ثانیہ یا ۳۲٫۱ فُٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے (مترجم)

پھینکا گیا جس کی تعبیر وقتی محور سے اُوپر خط م ا ہے۔ رفتار میں ایک یکساں شرح ج سے کمی ہو رہی ہے۔ م ب سے تعبیر شدہ وقتی وقفہ کے اختتام پر جسم ساکن ہو جاتا ہے جیسا کہ ب پر ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کے بعد اس کی رفتار نیچے کی جانب ہے (منفی) اور عدداً اس کی قیمت بڑھتی جاتی ہے یہاں تک کہ وہ ابتدائی وضع کے استواء میں آجائے۔ اب اس وقت اس میں ایک منفی رفتار ر ہے جس کو ہ س سے ظاہر کیا ہے۔



شکل ۳۷۔ رفتار مخالف جہتوں میں

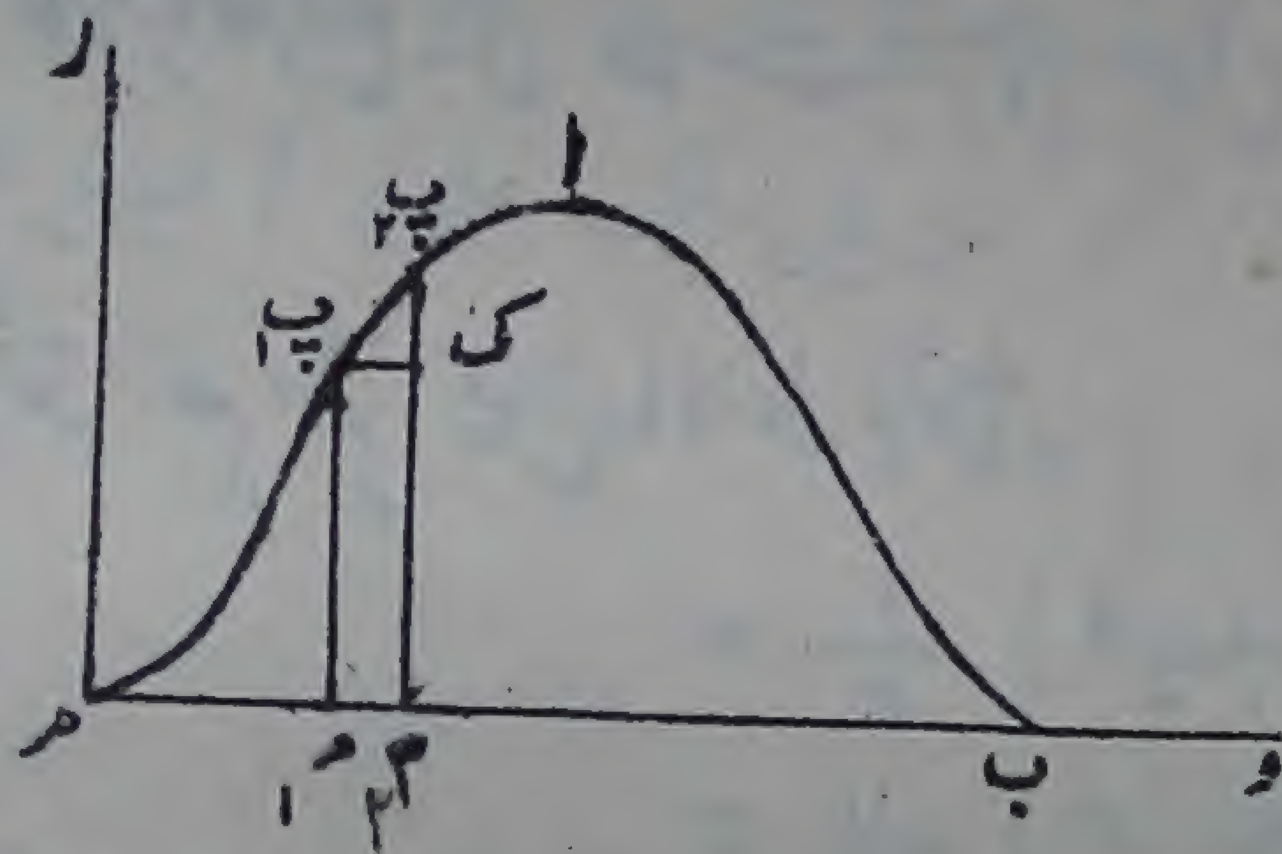
چونکہ اسراع کے یکساں ہونے کی وجہ سے ترسیم ا ب س ایک خطِ مستقیم ہے۔ اس لئے صعود کا وقت ہبوط کے وقت کے مساوی ہے اور اختتامی رفتار ر ابتدائی رفتار د کے مساوی ہے۔ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ کرۂ ہوائی کی مزاحمت نظر انداز کر دی گئی ہے۔

اگر نیچے کی طرف اسراعوں کو مثبت مان لیں تو مذکورہ بالا مثال میں دورانِ حرکت میں اسراع مثبت رہتا ہے۔ دورانِ صعود میں رفتار اور اسراع کی علامتیں مختلف ہیں اور رفتار برابر گھٹتی جاتی

ہے، دَورانِ ہبوط میں رفتار اور اِسراع کی علامتیں مختلف ہوتی ہیں لیکن رفتار برابر بڑھتی جاتی ہے۔

رفتار وقتی ترسیم کی عام صورت:۔

شکل ۳۸ء میں ایک رفتار وقتی ترسیم م ا ب دکھلائی گئی ہے۔ ایسے دو نقطوں پ$_1$، پ$_2$ کو لو جو ترسیم پر کافی قریب واقع ہوں۔ پ$_1$م$_1$ اور پ$_2$م$_2$ علی الترتیب ہر دو رفتار ر$_1$، ر$_2$ کو ظاہر کرتے ہیں۔ یہ رفتاریں متحرک نقطہ میں وقفے



شکل ۳۸ء ۔ رفتار وقتی ترسیم کی عام صورت

و$_1$، و$_2$ کے اختتام پر موجود ہیں۔ اِن وقفوں کو م م$_1$، م م$_2$ علی الترتیب ظاہر کرتے ہیں۔ پ$_1$ک وقتی محور کے متوازی کھینچو، تو

پ$_2$ک = پ$_2$م$_2$ − پ$_1$م$_1$ = ر$_2$ − ر$_1$

اور یہ رفتار کی تبدیلی وقتی وقفے

م$_1$م$_2$ = م م$_2$ − م م$_1$ = و$_2$ − و$_1$ میں ہے۔

پس اِس وقفے میں اوسط اِسراع (ع$_ط$)

ع$_ط$ = (ر$_2$ − ر$_1$) / (و$_2$ − و$_1$)

= (پ$_2$م$_2$ − پ$_1$م$_1$) / (م م$_2$ − م م$_1$)

اوسط اِسراع کی قیمت دریافت کرنے کے لئے جن مقداروں کی ضرورت ہے ترسیم میں اُن کی پیمائش ہوسکتی ہے۔ اگر یہ مان لیں کہ وقفہ $\text{م}_1\text{م}_2$ کے وسط میں حقیقی اسراع حساب کردہ اوسط اسراع کے مساوی ہے تو خطا زیادہ نہ ہوگی۔ پس ح ب میں وقفے لے کر مذکورہ بالا طریقے سے اوسط اِسراع نکال کر اور ہر وقفہ کے وسط میں اسراع کے مساوی معین بنا کر، ہم ایک اسراع وقتی ترسیم حاصل کرسکتے ہیں۔

واضح رہے کہ اگر $\text{پ}_2\text{م}_2$ چھوٹا ہو $\text{پ}_1\text{م}_1$ سے تو رفتار گھٹتی ہوئی ہے اور اِسراع کی علامت بڑھتی ہوئی رفتار کی علامت کے مخالف ہوتی ہے۔

پھر وقفہ $\text{م}_1\text{م}_2$ میں اوسط رفتار

$$= \frac{1}{2}(\text{پ}_1\text{م}_1 + \text{پ}_2\text{م}_2)$$

$$= \frac{1}{2}(\text{ر}_1 + \text{ر}_2)$$

چونکہ وقتی وقفہ $\text{م}_1\text{م}_2 = \text{و}_2 - \text{و}_1$ تو معلوم ہوا کہ وقفہ $\text{م}_1\text{م}_2$ میں

نقلِ مکان

$$= \frac{1}{2}(\text{و}_2 - \text{و}_1)(\text{ر}_1 + \text{ر}_2)$$

$$= \frac{1}{2}(\text{م}_1\text{م}_2)(\text{پ}_1\text{م}_1 + \text{پ}_2\text{م}_2)$$

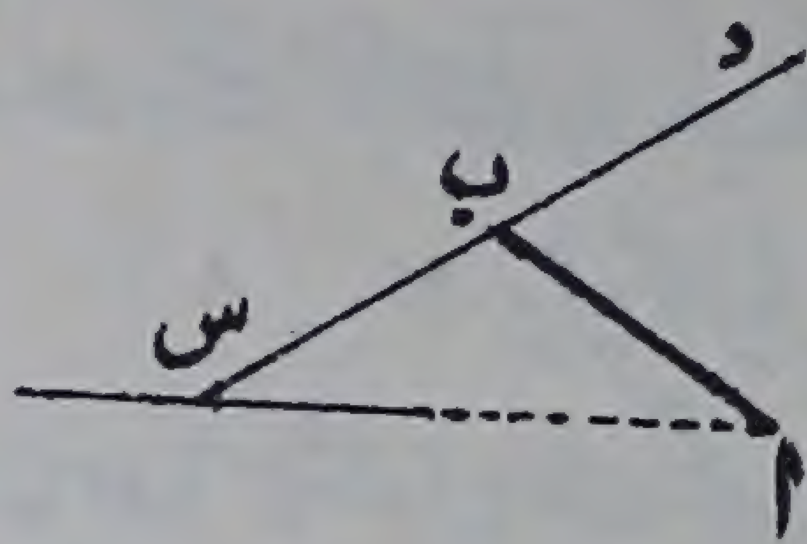
$$= \text{رقبہ } \text{پ}_1\text{م}_1\text{م}_2\text{پ}_2 \quad \text{تقریباً}$$

اگر وقفہ $\text{م}_1\text{م}_2$ چھوٹے سے چھوٹا کر دیا جائے تو یہ تقرب صحت کے بہت قریب ہو جاتا ہے۔ اور اگر وقفہ بے نہایت چھوٹا کر دیا جائے تو یہ تقرب عین صحت ہو جاتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ ترسیم کی کسی اِس جیسی پٹی کا رقبہ، پٹی کے قاعدہ سے ظاہر شدہ وقتی وقفہ میں نقلِ مکان کو ظاہر کریگا۔ پس مجموعی وقت ح ب کے لئے مجموعی نقلِ مکان ترسیم کے مجموعی رقبے سے ظاہر ہے جس کو مساحت کے اصولوں سے دریافت کرسکتے ہیں۔ مثلاً ترسیم کا رقبہ سطح پیما سے

معلوم کرو۔ اِس رقبہ کو طول م ب سے تقسیم کرو تاکہ ترسیم کی اوسط بلندی معلوم ہو جائے۔ اِس اوسط بلندی کو رفتار کے پیمانہ سے ضرب دو۔ اِس طرح کُل ترسیم کے لئے اوسط رفتار معلوم ہو جائیگی۔ اوسط رفتار کو م ب سے جس کو ثانیوں میں ہونا چاہئے، ضرب دو۔ تو نتیجہ مجموعی نقلِ مکان نکلیگا۔

تیسری فصل کی مشقیں

(۱) ایک چوڑے تختے میں دو نالیاں بنی ہوئی ہیں جو ایک دُوسری کو تختہ کے مرکز پر علی القوائم قطع کرتی ہیں۔ ایک سلاخ ا ب ۲،۵ اِنچ لمبی تختہ کے مستوی میں حرکت کرتی ہے۔ ا ایک نالی میں حرکت کرتا ہے اور ب دُوسری نالی میں۔ اب (۱) ا ب کے مرکز پر ایک نقطہ کا طریق (۲) سلاخ میں ب سے ۰،۷۵ اِنچ پر ایک نقطہ کا طریق دریافت کرو۔



شکل ۳۹

(۲) شکل ۳۹ میں ا ب ایک ۲ اِنچ طول والی سلاخ ہے جو ایک ثابت مرکز ا کے گرد گھُوم سکتی ہے۔ س ب د ایک دُوسری سلاخ ہے جو ا ب سے ب پر وصل ہے۔ اور جس کا کنارہ س ایک ایسی نالی میں حرکت کرنے پر مجبور ہے جس کی سمت ا میں سے ہو کر گزرتی ہے۔ س ب کا طول ۲ اِنچ ہے تو د کا طریق کھینچو جب کہ

(۱) ب د ۲ اِنچ لمبا ہو۔

(۲) ب د ۳ اِنچ لمبا ہو۔

(۳) ایک نقطہ پر دو جُزئی نقول مکان ایک ۲۴ سم بجانب شمال مشرق، دُوسرا ۳۰ سم بجانب شمال عمل پیرا ہیں۔ حاصل نقل معلوم کرو۔

(۴) ایک اُفقی خط م لا بطور حوالہ کے محور کے کھینچو ۔ م سے چل کر ایک نقطہ پر ذیل کے جُزئی نقول علی الترتیب عمل پیرا ہیں :—

م لا سے ۳۰° پر ۲ اِنچ، م لا سے ۴۵° پر ۳ اِنچ، م لا سے ۲۴۰° پر ۵ انچ، م لا سے ۹۰° پر ۴ اِنچ۔ حاصل نقل معلوم کرو۔

(۵) اُس گھوڑے کی اوسط چال فٹ فی ثانیہ میں کیا ہوگی جو ۱٫۲۵ گھنٹے میں ۱۱ میل کی مسافت طے کرے۔

(۶) ایک مُشاہد نے دیکھا کہ بجلی کی چمک دکھائی دینے کے ۳٫۵ ثانیہ بعد گرج کی آواز سنائی دی۔ اگر آواز کی رفتار ۱۱۰۰ فُٹ فی ثانیہ ہو تو چمک اور مُشاہد کا درمیانی فاصلہ میلوں میں معلوم کرو۔

(۷) دو مُسابِق ا اور ب ایک ہی مقام سے روانہ ہوتے ہیں۔ ا، ب سے ۳۰ ثانیہ قبل روانہ ہوتا ہے اور ۸ میل فی گھنٹہ کی مستقل چال سے دوڑتا ہے۔ ب اِسی سڑک پر ۱۰ میل فی گھنٹہ کی مستقل چال سے دوڑتا ہے۔ نقطۂ آغاز سے کتنے فاصلے پر ب، ا کو جالیگا؟

(۸) دو ریل گاڑیاں ا اور ب مخالف سمتوں میں چلتی ہوئی ایک ہی وقت میں دو اسٹیشنوں سے گزرتی ہیں جو ایک دُوسرے سے ۱۵٫۵ میل دُور ہیں۔ اگر ا کی مستقل چال ۴۰ میل فی گھنٹہ ہو تو ب کی مستقل چال معلوم کرو تاکہ دونوں ریل گاڑیاں اِس اسٹیشن سے جس سے ا گزر چکی ہے ۹٫۰ میل پر ایک دُوسری کے پاس سے گزریں۔

(۹) ایک ریل گاڑی جو یکساں چال سے رواں ہے ۱۰ ثانیوں میں ایسے دو نقطوں سے گزرتی ہے جو ۴۸۰ فٹ علٰحدہ ہیں تو اس کی چال میل فی گھنٹہ کے حساب سے معلوم کرو۔

(۱۰) ایک ریل گاڑی حالتِ سکون سے رواں ہوتی ہے اور ۱۵ ثانیوں میں ۱۰ میل فی گھنٹے کا چال میں اِضافہ ہوتا ہے تو فُٹ اور ثانیوں میں

اِسراع دریافت کرو۔ رفتار وقتی ترسیم بھی بناؤ۔

(۱۱) ایک جہاز جو ۲۲ کلومیٹر فی گھنٹہ کے حساب سے رواں ہے ۱۴ ثانیوں میں اُس کی رفتار ۱۸ کلومیٹر فی ثانیہ ہو جاتی ہے۔ تو میٹر اور ثانیوں میں اِسراع دریافت کرو۔ رفتار وقتی ترسیم بناؤ۔

(۱۲) ایک جسم جو ۸۰۰ فُٹ فی منٹ کی رفتار سے رواں ہے ½ ثانیہ میں ساکن ہو جاتا ہے اِسراع کو یکساں مانو اور اُس کو دریافت کرو۔ رفتار وقتی ترسیم بناؤ۔

(۱۳) ۶۰ میل فی گھنٹہ فی منٹ کے اِسراع کو میٹر فی ثانیہ فی ثانیہ میں تحویل کرو۔

(۱۴) ایک ریل گاڑی حالتِ سکون سے ۱٫۷ فُٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اِسراع سے رواں ہوتی ہے تو ۲۵ ثانیوں کے بعد اُس کی چال میل فی گھنٹہ میں کیا ہوگی؟ اِس عرصہ میں وہ کتنا فاصلہ طے کرلیتی ہے؟ ایک رفتار وقتی ترسیم بناؤ۔

(۱۵) ایک ریل کی رفتار ۱۵ ثانیوں میں ۶۰ سے ۵۰ میل فی گھنٹہ رہ جاتی ہے۔ تو اِس عرصہ میں وہ کتنا فاصلہ طے کرتی ہے؟ ایک رفتار وقتی ترسیم بناؤ۔

(۱۶) ایک ریل حالتِ سکون سے ۰٫۹۷ فُٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اِسراع سے رواں ہوتی ہے۔ اور ۳۰ ثانیہ تک اُس کو قائم رکھتی ہے۔ اِس کے بعد مستقل چال قائم رہتی ہے تا آنکہ بھاپ بند کر دی جاتی ہے اور ضابط لگا دیئے جاتے ہیں جس سے ۱٫۵ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا ایک منفی اِسراع پیدا ہو جاتا ہے یہاں تک کہ ریل ساکن ہو جاتی ہے۔ اگر کُل فاصلہ طے شدہ ۲ میل ہو تو وہ مدت بتلاؤ جس میں چال یکساں رہی اور کُل مسافت کی مدت بھی دریافت کرو۔ ایک رفتار وقتی ترسیم بناؤ۔

(۱۷) اگر ایک ریل کی چال ۳۰ میل فی گھنٹہ ہو تو اِس میں کتنا اِسراع ہونا چاہئے تاکہ ۲۰۰ گز کے فاصلہ پر وہ جاکر رُک جائے۔ ایک رفتار وقتی ترسیم بناؤ۔

(۱۸) ایک جسم ۵۰ میٹر کی بلندی سے آزادانہ گرتا ہے تو بتلاؤ کہ زمین سے مَس کرنے سے قبل اُس کی رفتار کیا تھی اور اُس میں کتنی مدت صَرف ہوئی۔ رفتار وقتی اور فصل وقتی ترسیمیں بناؤ۔ ج = ۹۸۱ سمر فی ثانیہ فی ثانیہ مانو۔

(۱۹) ایک پتھر انتصاباً اُوپر کی جانب پھینکا جاتا ہے۔ تو ابتدائی رفتار دریافت کرو تاکہ وہ ۱۵۰ فٹ کی بلندی تک پہنچ سکے۔ اگر پتھر پہلی سطح پر آکر گر پڑے تو کُل مدتِ پرواز دریافت کرو۔ رفتار وقتی ترسیم بناؤ۔ ج = ۳۲٫۲ فُٹ فی ثانیہ فی ثانیہ مانو۔

(۲۰) ایک پتھر کنویں میں پھینکا جاتا ہے اور ۲٫۵ ثانیوں میں پانی تک پہنچتا معلوم ہوتا ہے۔ تو پانی کی سطح تک کنویں کی گہرائی کیا ہے۔ ج = ۳۲٫۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ مانو۔

(۲۱) اگر سوال نمبر ۲۰ میں آواز پتھر گرنے کے ۲٫۶ ثانیہ بعد سنائی دے تو پانی کی سطح تک کنویں کی گہرائی کیا ہے۔ آواز کی رفتار ۱۱۰۰ فُٹ فی ثانیہ اور ج = ۳۲٫۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ مانو۔

(۲۲) ایک پتھر انتصاباً نیچے کی جانب ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ تو تیسرے ثانیہ کے اختتام پر رفتار کی کیا قیمت ہوگی؟ اور اِس ثانیہ تک وہ کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

(۲۳) ایک پتھر انتصاباً اُوپر کی جانب ۱۶۰ فُٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ ۲ ثانیہ بعد اِسی مقام سے دُوسرا پتھر پھینکا جاتا ہے۔ تو بتلاؤ کہ پہلا پتھر کس بلندی تک پہنچیگا اور دُوسرے پتھر کی رفتار کیا ہونی چاہیئے تاکہ وہ پہلے سے اُس وقت ٹکرائے جب کہ وہ نیچے کی جانب گرنے کو ہو؟

(۲۴) ایک پتھر ۶۴ فٹ کی بلندی سے گرایا جاتا ہے۔ اُسی وقت ایک دُوسرا پتھر بالکل نیچے سے ایسی رفتار سے پھینکا جاتا ہے کہ وہ ۶۴ فُٹ تک پہنچ سکے۔ تو بتلاؤ کہ کب اور کس جگہ دونوں پتھر ملیں گے؟ [جامعۂ لنڈن]

(۲۵) ایک بلندی سے یکے بعد دیگرے آدھے آدھے ثانیہ کے بعد آٹھ جسم گرائے جاتے ہیں۔ اگر ج = ۳۲ فُٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہو تو حساب کر کے

اور نیز شکل بنا کے جسموں کی اُس وقت کی وضعیں بتلاؤ جس وقت کہ آخری جسم پھینکا گیا۔ اِن میں سے کسی ایک جسم کی اضافی رفتار بلحاظ اپنے مابعد کے جسم کے کیا ہوگی؟ [جامعۂ لندن]۔

(۲۶) ایک جسم ایک خطِ مستقیم میں متغیر رفتار سے رواں ہے۔ایک مُنحنی کھینچا جاتا ہے جس میں معین رفتار کو، فصلے سے ظاہر شدہ وقت پر ظاہر کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی وقفہ میں جسم کی طے کردہ مسافت دو متوافق معینوں سے گھِرے ہوئے رقبہ کے مساوی ہے۔ ۴، ۵، ۷ ثانیوں کے تین متواتر وقفوں میں جسم علی الترتیب ۱۲، ۳۰، اور ۶۳ گز طے کرتا معلوم ہوتا ہے۔ کیا وہ یکساں اسراع سے حرکت کر رہا ہے؟ [جامعۂ لندن]

(۲۷) ۵۰۷ فُٹ بلند ایک مینار سے ایک پتھر اُوپر کی جانب ۶۴ فُٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ تو بتلاؤ کہ اِس کی سب سے بڑی بلندی کیا ہے، زمین سے ٹکرانے کے وقت اِس کی رفتار اور زمین تک پہنچنے کی مدت دریافت کرو (ج = ۳۲)۔

(۲۸) ضابطہ ف = د و + $\frac{1}{2}$ ع و^2 قائم کرو۔

ایک مرتفع نقطہ ا سے ایک پتھر انتصاباً اُوپر پھینکا جاتا ہے۔ جب پتھر ا سے نیچے ایک فاصلہ ح پر پہنچتا ہے تو اِس کی رفتار اُس رفتار سے دُونی تھی جو ا سے اُوپر بلندی ح پر تھی۔ ثابت کرو کہ ا سے اُوپر سب سے بڑی بلندی جس تک کہ پتھر پہنچ سکتا ہے $\frac{5}{3}$ ح ہے۔ [جامعۂ اَدِیلاڈ]

(۲۹) دو ریلیں ا اور ب ایک اسٹیشن سے دو متوازی پٹڑیوں پر روانہ ہوتی ہیں۔ ریل ا $\frac{1}{2}$ فُٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے یکساں اسراع سے روانہ ہوتی ہے اور ۱۵ میل فی گھنٹہ کی اعظم چال حاصل کرلیتی ہے۔ اِس وقت بھاپ کم کردی جاتی ہے جس سے چال مستقل ہو جاتی ہے۔ ا سے ۴۰ ثانیہ بعد ب ۱ فُٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے یکساں اسراع سے روانہ ہوتی ہے اور ۳۰ میل فی گھنٹہ کی اعظم چال حاصل کرلیتی ہے۔ بتلاؤ کہ اسٹیشن سے کتنے فاصلے پر ب، ا کو جالیگی؟

(۳۰) ذیل کے مقدمات سے ایک رفتار وقتی ترسیم بناؤ:۔

۵ انچ لمبا ایک اُفقی خط م لا کھینچو۔ اور اس کو ۱۰ مساوی حصّوں میں تقسیم کرو کہ ہر حصہ ۲ء۰ ثانیہ کو تعبیر کرے۔ م لا پر م ها عمود کھینچو۔ اور اس پر رفتاروں کا ایک پیمانہ بناؤ کہ ۵ء۰ انچ ۱۰ فُٹ فی ثانیہ کی رفتار کو ظاہر کرے۔ م لا پر ظاہر کردہ وقتی وقفوں کے آغاز پر فُٹ فی ثانیہ میں رفتاریں حسبِ ذیل ہیں :۔ ۰، ۱۶، ۳۰، ۴۲، ۴۹، ۴۹، ۴۷، ۴۰، ۲۸، ۱۴، ۰۔

(ا) وقت کے ہر وقفہ میں رفتار کی تبدیلی اور اوسط اِسراع دریافت کرو۔ ایک اِسراع وقتی ترسیم وقتی وقفوں کے وسط میں اوسط اِسراعوں کو لے کر بناؤ۔ اِسراع کے لئے پیمانہ :۔

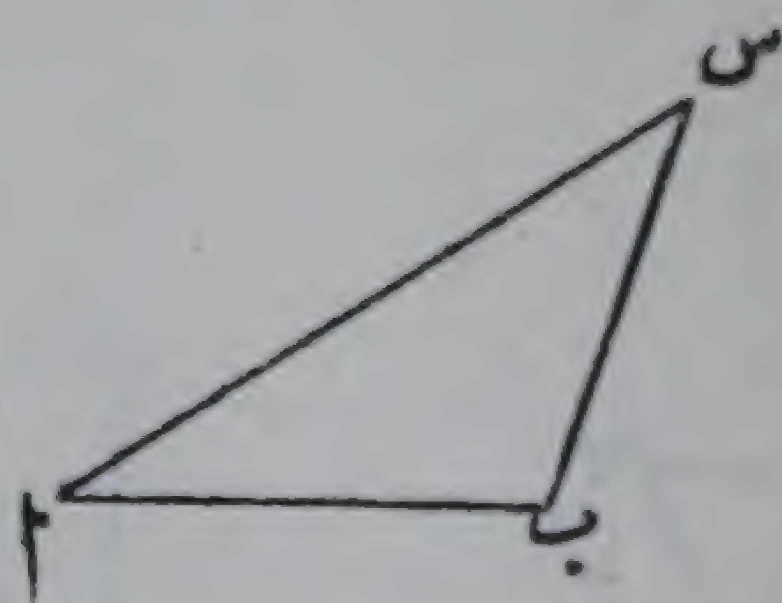
ایک انچ مساوی ۲۰ فُٹ فی ثانیہ فی ثانیہ۔

(ب) ہر وقتی وقفہ میں اوسط رفتار نکالو اور ہر وقفہ میں نقلِ مکان معلوم کرو۔ پھر ان قضایا سے م لا سے ظاہر کردہ ۲ ثانیوں کی کُل مدّت میں نقلِ مکان دریافت کرو۔

چوتھی فصل

رفتاروں اور اسراعوں کی ترکیب و تحلیل

رفتاروں کی ترکیب و تحلیل ——— رفتار چونکہ سمتی مقدار ہے اِس لئے نقلِ مکان کی طرح خطِ مستقیم سے تعبیر کی جا سکتی ہے۔ ایک دِی ہوئی رفتار کو دو یا دو سے زیادہ جُزئی رفتاروں کا مجموعہ سمجھ سکتے ہیں۔ اور یہ جُزئی رفتاریں شکل ۲۸ و ۲۹ صفحہ (۴۲) کے سمتی جمع کے قاعدوں کے مطابق حاصل رفتار معلوم کرنے کے لئے جمع کی جا سکتی ہیں۔ چنانچہ اگر کسی نقطہ میں ایک رفتار قدر، سمت جہت میں ا ب (شکل ۴۰) سے ظاہر ہو اور اگر اُس کا نقطۂ آغاز ا ہو



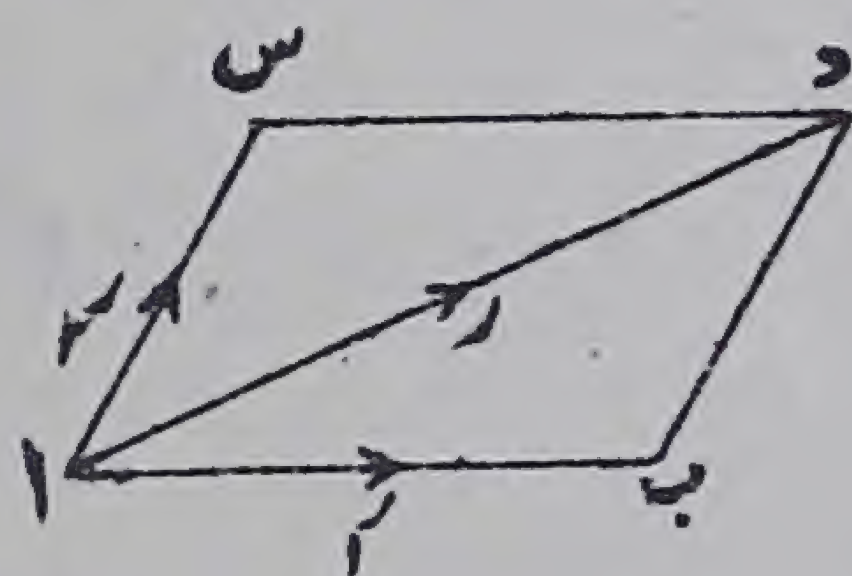
شکل ۴۰۔ رفتاروں کا مثلث

تو وہ ایک ثانیہ میں ا سے ب تک طے کریگا۔ فرض کرو کہ ب پر

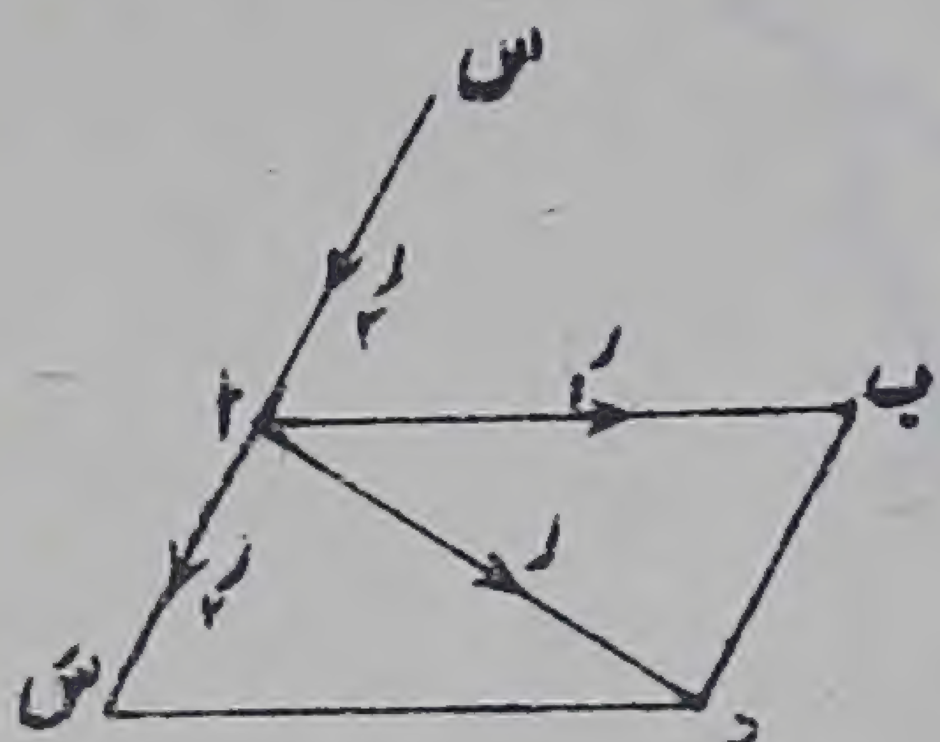
پہنچ کر نقطہ کی ابتدائی رفتار ضائع کر دی جائے اور اُس کی بجائے اِس میں ایک دُوسری رفتار پیدا کردی جائے جس کو ب س ظاہر کرے تو اب نقطہ ایک ثانیہ میں ب سے س تک پہنچیگا۔ اگر دونوں رفتاریں ایک ساتھ نقطہ میں پیدا کی جائیں جب کہ وہ ا پر تھا تو نقطہ راستہ ا س طے کرتا اور س تک ایک ثانیہ میں پہنچتا۔ پس ا س ایک حاصل رفتار ہے جس کے ا ب اور ب س اجزاء ہیں۔ اِسی طرح متعدد رفتاروں پر بھی یہ امر صادق آتا ہے۔ شکل ۴۰ میں مثلث ا ب س کو ہم **رفتاروں کا مثلث** کہہ سکتے ہیں۔

رفتاروں کی ترکیب دئے ہوئے اجزاء سے حاصلِ رفتار دریافت کرنے کے عمل کا نام ہے **رفتاروں کی تحلیل** اِس کا عکس ہے۔

رفتاروں کا متوازی الاضلاع:۔ کبھی کبھی بجائے رفتاروں کے مثلث ا ب س کے (شکل ۴۰) ایک عمل جس کو **رفتاروں کا متوازی الاضلاع** کہتے ہیں، استعمال کیا جاتا ہے۔ شکل ۴۱ میں نقطہ ا میں دو جُزئی رفتاریں ر۱ اور ر۲ ہیں جن کو علی الترتیب ا ب اور ا س ظاہر کرتے ہیں۔ متوازی الاضلاع ا ب د س کو مکمل کرو تو وتر ا د کامل طور سے حاصلِ رفتار ر کو ظاہر کریگا۔ یہ ظاہر ہے کہ



شکل ۴۱۔ رفتاروں کا متوازی الاضلاع

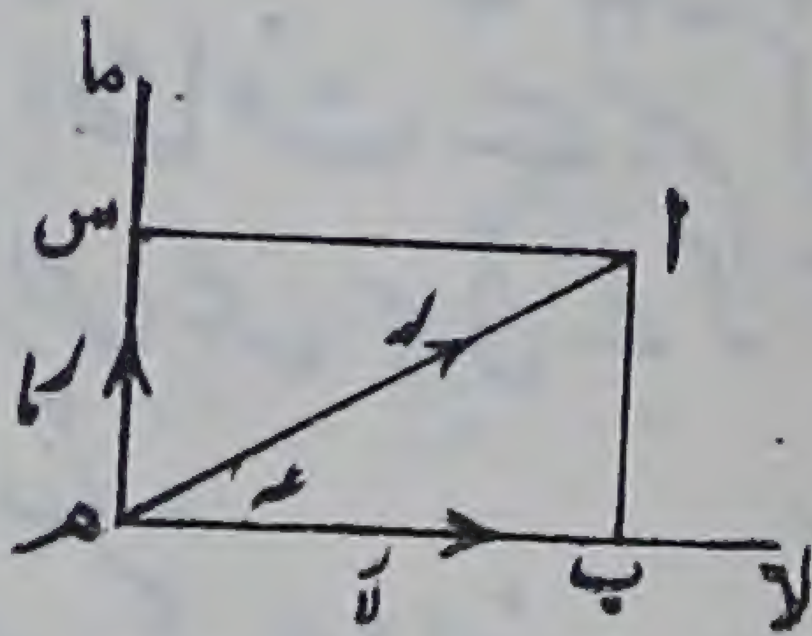


شکل ۴۲

شکل ۴۰ کے مثلث ا ب د جو متوازی الاضلاع کا نصف ہے شکل ۴۰ کے مثلث ا ب س کے مطابق رفتاروں کا مثلث ہے۔ رفتاروں کے متوازی الاضلاع بنانے سے پہلے رفتاروں کو اِسی طرح ترتیب دینا چاہئے کہ سب جہتیں یا تو ا سے دُور ہوں یا ا کی طرف ہوں۔ یہ عمل شکل ۴۲ میں دکھلایا گیا ہے۔ اِس میں ا ب اور س ا ہر دو رفتار ر۱ اور ر۲ کو ظاہر کرتے ہیں۔ ر۲ کو ظاہر کرنے کے لئے ا س کھینچا جاتا ہے اور اب ر۱ اور ر۲ دونوں کی جہتیں ا سے دُور ہیں۔ حسبِ سابق متوازی الاضلاع بنایا جاتا ہے جس میں ا د حاصلِ رفتار ر کو ظاہر کرتا ہے۔

رفتار کے اجزائے مستطیل

مسائل کے حل کرنے میں سہولت اِسی میں ہوتی ہے کہ کسی دی ہوئی رفتار کے اجزاء دو مستطیل محوروں کی سمت میں لئے جائیں جو ایک دُوسرے کو دی ہوئی رفتار کے خط کے کسی نقطہ پر قطع کریں اور اِسی مستوی میں واقع ہوں۔ شکل ۴۳ میں م ا دی ہوئی رفتار ر کو ظاہر کرتا ہے۔ شرائط بالا کے مطابق م لا اور م ما دو مستطیل محور ہیں۔ جُزئی رفتاریں ر لا اور ر ما علی الترتیب م لا اور م ما پر



شکل ۴۳۔ ر کے مستطیل اجزاء

ہر دو عمود اب اور اس کھینچ کر معلوم کی جاتی ہیں۔ $ر_{لا}$ اور $ر_{ما}$ کو علی الترتیب مب اور مس ظاہر کرتے ہیں۔ فرض کرو زاویہ $\angle$ م ا = عہ تو

$$\frac{مب}{ما} = جم\ عہ \quad یا \quad \frac{ر_{لا}}{ر} = جم\ عہ$$

$$\therefore \quad ر_{لا} = ر\ جم\ عہ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$نیز \quad \frac{مس}{ما} = جب\ م\ ا\ س = جب\ عہ \quad یا \quad \frac{ر_{ما}}{ر} = جب\ عہ$$

$$\therefore \quad ر_{ما} = ر\ جب\ عہ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$مزید برآں \quad ما^{۲} = مب^{۲} + با^{۲} = مب^{۲} + مس^{۲}$$

$$یا \quad ر^{۲} = ر_{لا}^{۲} + ر_{ما}^{۲}$$

$$\therefore \quad ر = \sqrt{ر_{لا}^{۲} + ر_{ما}^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اضافی رفتار

ایک شخص زمین پر کھڑا اگر ایک متحرک جسم کو دیکھ رہا ہو تو اِس کو جسم کی حرکتِ مطلق کا احساس نہیں ہوتا۔ جو کچھ وہ مُشاہدہ کرتا ہے اُس کو ہم **زمین کی اضافت** سے جسم کی حرکت کہہ سکتے ہیں۔ ایسی صورتوں میں سہولت اِس میں ہوتی ہے کہ زمین اور نیز مُشاہد کو حیز یا مکان میں ثابت مانا جائے۔

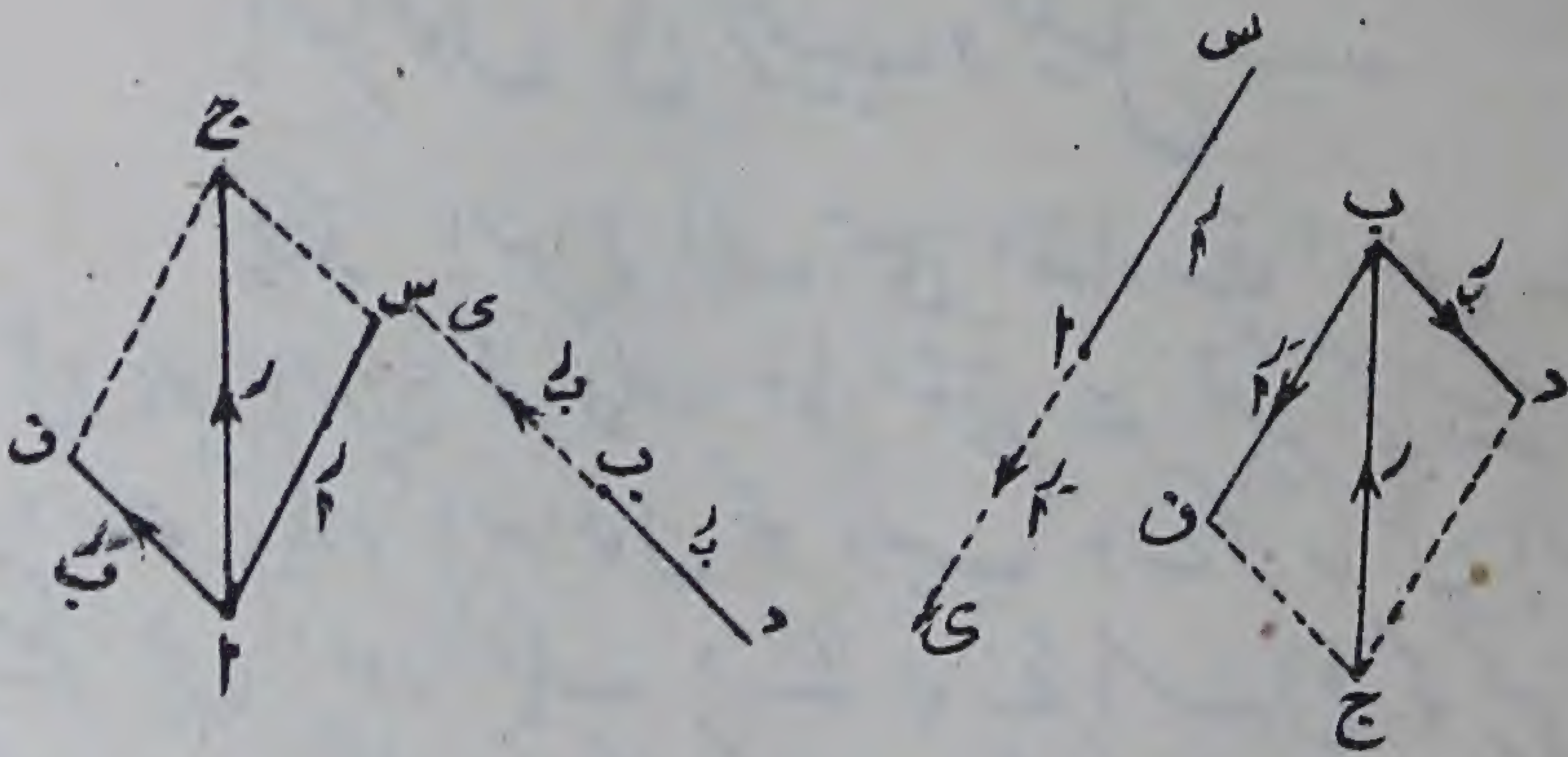
کسی دُوسرے جسم کی **اضافت** سے کسی جسم کی رفتار سے مُراد وہ رفتار ہے جو ایک مُشاہد کو بشرطیکہ وہ دُوسرے جسم پر موجود اور اُس کے ساتھ متحرک ہو، پہلے جسم میں نظر آئے۔

مثال ——— فرض کرو کہ دو ریلیں متوازی پٹڑیوں پر ہم جہت اور مساوی رفتاروں سے رواں ہیں۔ اِن میں سے کسی ایک پر کا مسافر دُوسری ریل میں کوئی رفتار نہ محسوس کریگا بلکہ اِس کو وہ ساکن نظر آئیگی۔ اِس صورت میں ہر ریل کی رفتار دُوسری کی اضافت سے صفر ہے۔ اگر ایک ریل ا کی رفتار ۴۰ میل فی گھنٹہ شمال کی جانب ہو اور دُوسری ریل ب کی بھی رفتار ۳۰ میل فی گھنٹہ بجانب شمال ہو تو ب کا مسافر ا کو ۱۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اپنے سامنے سے گزرتا دیکھیگا۔ اور ا کی رفتار بہ اضافتِ ب کو وہ ۱۰ میل فی گھنٹہ بجانب شمال تبلائیگا۔ اور ا پر کا مسافر ب کو ۱۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے پیچھے رہتے دیکھیگا اور ب کی رفتار بہ اضافت ا کو وہ ۱۰ میل فی گھنٹہ بجانب جنوب تبلائیگا۔

اِن بیانات میں تعمیم یوں پیدا کی جا سکتی ہے کہ **ایک جسم ا کی رفتار بہ اضافت ایک دُوسرے جسم ب کے، ب کی رفتار بہ اضافت ا کے مساوی اور مخالف ہے۔**

اضافی رفتار کی تخمین

شکل ۴۴ میں ایک نقطہ ا کی رفتار کاغذ کی اضافت سے



شکل ۴۴۔ ب کی رفتار بہ اضافتِ ا

شکل ۴۵۔ ا کی رفتار بہ اضافتِ ب

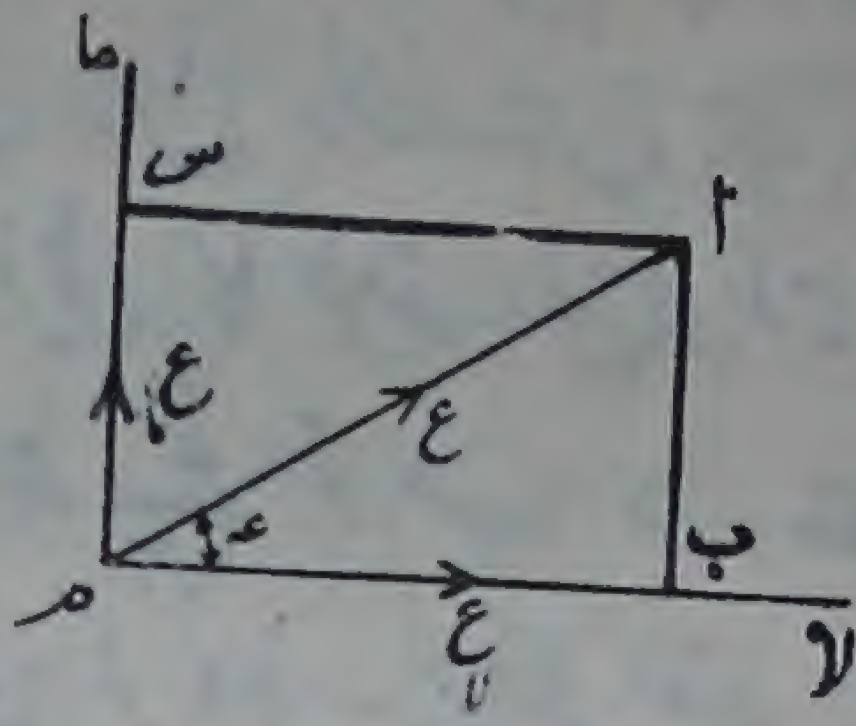
ر ہے جس کو ا س ظاہر کرتا ہے۔ ایک دُوسرے نقطہ ب میں

کاغذ کی اضافت سے ایک رفتار ر ب ہے جس کو ب د تعبیر کرتا ہے۔ ا کی اضافت سے ب کی رفتار حاصل کرنے کے لئے ا میں ایک رفتار -ر ا پیدا کرکے اس کی حرکت روک دو۔ اور اس رفتار کو ا ی سے ظاہر کرو جو ر ا کے مساوی اور مخالف ہے۔ پہلی حالت کو برقرار رکھنے کے لئے ب میں بھی ایک رفتار -ر ا پیدا کرو جس کو ب ف ظاہر کرے۔ اب کاغذ کی اضافت سے ا حالتِ سکون میں ہے اور ب میں جزئی رفتاریں ر ب اور -ر ا ہیں تو ا کی اضافت سے ب کی رفتار حاصل رفتار ر ہوگی جو رفتاروں کے متوازی الاضلاع ب د ج ف کو مکمل کرنے سے حاصل ہوگی۔

اسی طریقہ پر ب کی اضافت سے ا کی رفتار بھی معلوم ہوسکتی ہے (شکل ۴۵)۔ ب میں ایک رفتار -ر ب پیدا کرکے ب ساکن کردیا جاتا ہے اور ایک مساوی اور مشابہ رفتار پیدا کی جاتی ہے جس کو ا ف ظاہر کرتا ہے۔ ا میں اب دو جزئی رفتاریں ر ا اور -ر ب ہیں جن کو اگر ملایا جائے تو حاصل رفتار پیدا ہوگی جو ب کی اضافت سے ا کی رفتار ہے۔ واضح رہے کہ شکل ۴۴ میں ر شکل ۴۵ میں ر کے مساوی اور مخالف ہے۔

اِسراعوں کی ترکیب و تحلیل

چونکہ اسراع ایک سمتی مقدار ہے، اس لئے رفتاروں کی طرح ہم اسراع کو ایک خطِ مستقیم سے تعبیر کرسکتے ہیں، دو یا دو سے زیادہ اسراعوں کو ترکیب دے کر حاصل اسراع دریافت کرسکتے ہیں اور ایک دئے ہوئے اسراع کو کسی دو محوروں کی سمت میں تحلیل کرکے اس کے اجزاء نکال سکتے ہیں۔ مثلاً اگر جسم کے اسراع "ع" کو قدر، سمت اور جہت میں ھ ا ظاہر کرے (شکل ۴۶) تو دو مستطیل محور ھ لا اور ھ ما کی سمت میں



شکل ۴۶ ۔ اسراع کے مسلسل اجزاء

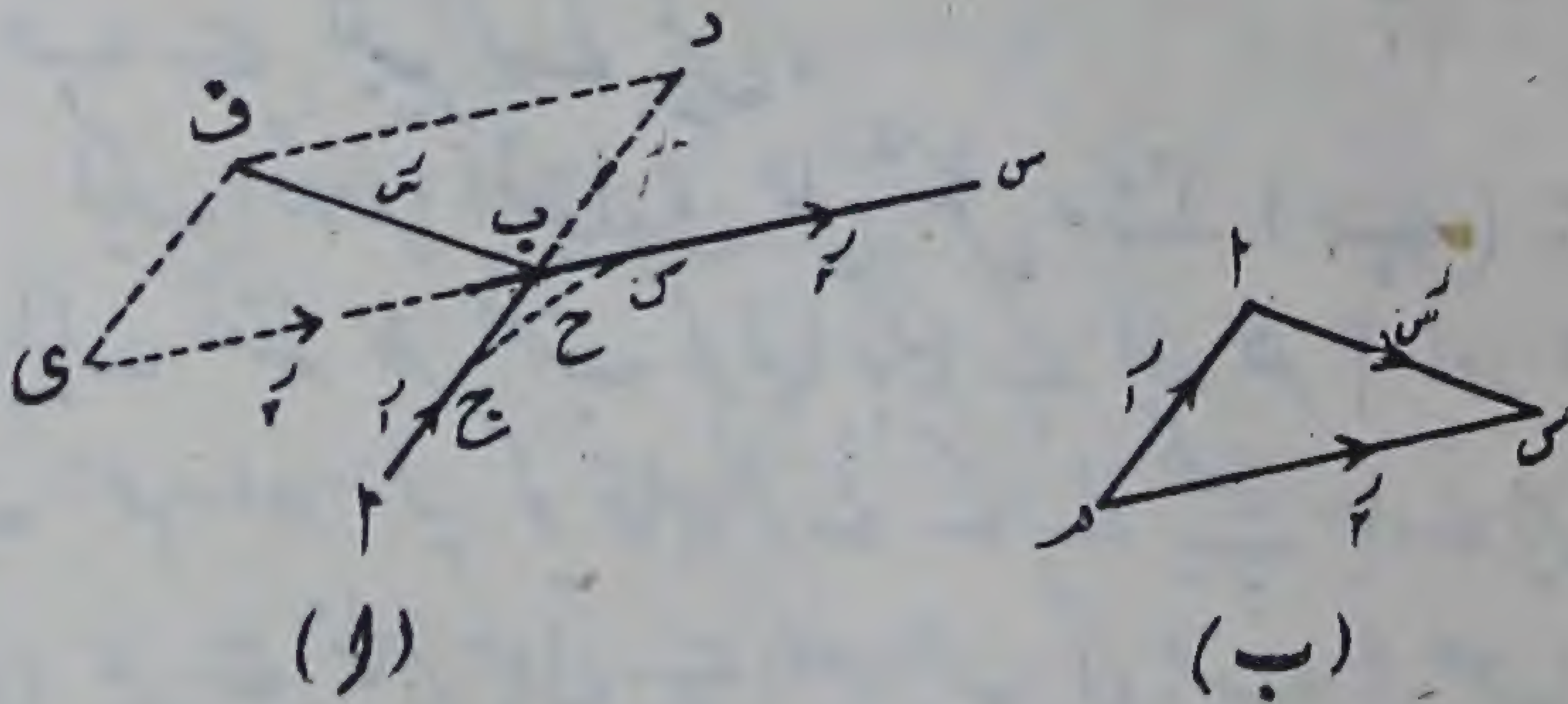
اِس کے اجزاء حسبِ ذیل ہونگے :-

$$\text{ع}_{\text{لا}} = \text{ع جم عہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{ع}_{\text{ی}} = \text{ع جب عہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$\text{نیز} \quad \text{ع} = \sqrt{\text{ع}_{\text{لا}}^{2} + \text{ع}_{\text{ی}}^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

رفتار سمت میں بدلی ہوئی ـــــ شکل ۴۷ (ا)



شکل ۴۷ ۔ رفتار ر۱ بدل کر ر۲

میں ایک نقطہ کی ابتدائی رفتار ر۱ ہے جس کو اب ظاہر

کرتا ہے۔ اور ایک آخری رفتار ر ہے جس کو ب س سے تعبیر کیا ہے۔ اِس دَوران میں رفتار میں جو تبدیلی ہوئی ہے اُس کے دریافت کرنے کے لئے ہم کو ذیل کا طریقہ اختیار کرنا چاہئے:۔

نقطہ جب ب پر پہنچے تو ب د سے ظاہر شدہ ایک رفتار ۔ر دے کر اِس کو ساکن کر دو۔ چونکہ نقطہ اب حالتِ سکون میں ہے اِس لئے ہم جس طرف چاہیں کسی چال سے اُسے رواں کر سکتے ہیں۔ اِس میں ی ب سے ظاہر شدہ مطلوبہ رفتار ر پیدا کر دو۔ رفتار کی حاصلِ تبدیلی رس کے اب دو اجزاء ۔ر اور ر ہیں۔ اور اگر ہم متوازی الاضلاع ب د ف ی بنائیں تو ف ب رس کو تعبیر کریگا۔

جیسا کہ آئندہ واضح ہو جائیگا ب پر پہنچنے کے ساتھ ہی رفتار کی تبدیلی کا وقوع پذیر ہونا ناممکن ہے۔ خط ا ب پر حرکت کرتے ہوئے کسی ذرّے یا جسم کی سمتِ حرکت ایک دُوسری سمت ب س میں اُسی وقت تبدیل کی جا سکتی ہے جب کہ جسم کسی منحنی کو طے کرے جیسا کہ شکل میں ج ح ک سے ظاہر کیا گیا ہے جتنی مدت میں ذرّہ ج سے ک تک سفر کرتا ہے اُتنی دیر میں رفتار کی کُل تبدیلی مذکورہ بالا طریقہ سے معلوم ہو سکتی ہے اور اِس کو ف ب سے تعبیر کرتے ہیں۔

ایک دُوسرا اختیاری عمل شکل ۴۷ (ب) میں دکھلایا گیا ہے۔ ایک نقطہ م منتخب کر لیا جاتا ہے اور م ا اور م س علی الترتیب ر اور ر کو ظاہر کرنے کے لئے کھینچے جاتے ہیں۔ رفتار کی کُل تبدیلی رس سے ظاہر ہوتی ہے اور اِس کی جہت ا س ہے یعنی ابتدائی رفتار کے ختم سے آخری رفتار کے ختم کی طرف۔ یہ نکتہ قابلِ لحاظ ہے کہ شکل ۴۷ (ب) میں مثلث م ا س شکل ۴۷ (ا) کے مثلث ی ف ب کے مساوی اور

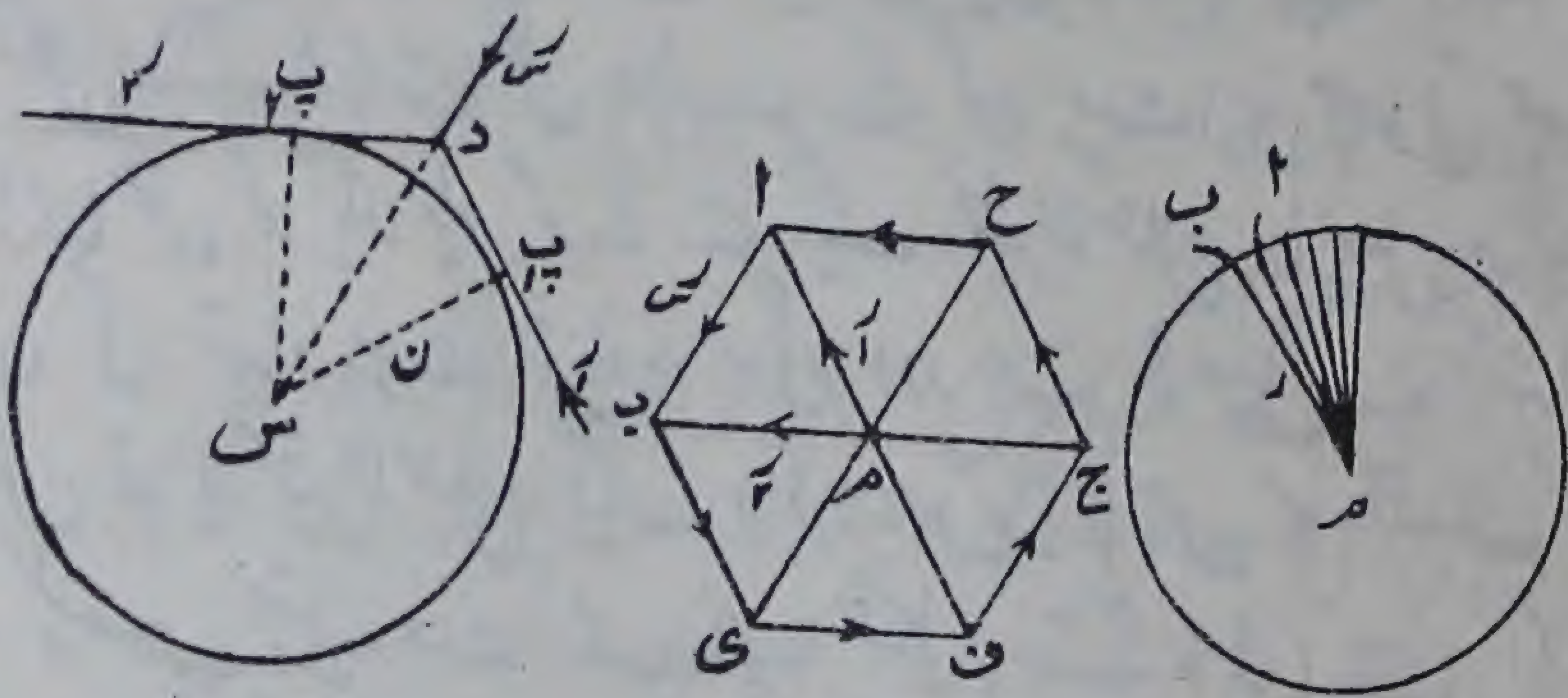
متشابہ ہے۔ پس اِس دُوسرے عمل کی صحت بھی مسلم ہوگئی۔

چونکہ راستہ ج ح ک پر حرکت کی وجہ سے رفتار میں حاصل تبدیلی رس پیدا ہوئی ہے یہ کہا جا سکتا ہے کہ اِس میں حاصل اِسراع بھی مضمر ہے جس کی سمت اور جہت وہی ہے جو رس کی۔ اِس اِسراع کا حساب لگایا جا سکتا ہے بشرطیکہ مدتِ وقت و معلوم ہو جس میں ذرّے نے ج سے ک تک کا فاصلہ طے کیا ہے۔ یعنی

$$\text{حاصلِ اِسراع} = \frac{\text{رس}}{\text{و}}$$

مدوّر راستہ میں حرکت:۔

مذکورہ بالا طریقوں کے استعمال کی ایک اہم صورت وہ ہے جس میں نقطہ یکساں رفتار سے ایک دائرے کے محیط میں حرکت کرتا ہے۔ شکل ۴۸ (ا) میں ایک نقطہ پ، ن سم نصف قطر والے دائرے کے محیط میں حرکت کر رہا ہے۔ اور اِس کی رفتار ر سم فی ثانیہ کی یکساں قدر رکھتی ہے۔ جب نقطہ پ۱ پر ہے تو اِس کی



شکل ۴۸ ۔ دائرے میں حرکت

رفتار کی سمت پ۱ پر کے مماس کی سمت ہوگی جس کو ر سے

ظاہر کیا ہے۔ اسی طرح جب نقطہ پ۲ پر ہوتا ہے تو رفتار کی سمت ر۲ سے ظاہر ہوتی ہے۔ ر۱ اور ر۲ دونوں عدداً ر کے مساوی ہیں۔ ر۱ اور ر۲ کو اگر بڑھایا جائے تو د پر ملینگے۔ جتنی مدت میں نقطہ پ۱ سے پ۲ تک آیا ہے اُتنی مدت میں رفتار کی تبدیلی حسبِ قاعدہ صفحہ (۷۰) معلوم کی جا سکتی ہے۔ ر۱ کو ظاہر کرنے کے لئے م ا کھینچو (شکل ۴۸ب) نیز ر۲ کو ظاہر کرنے کے لئے م ب کھینچو۔ رفتار کی کُل تبدیلی رس کے مساوی ہوگی اور ا ب سے ظاہر ہوگی۔ رس کو د پر منطبق کرو تو شکل کے ہندسہ سے ظاہر ہے کہ رس دائرے کے مرکز س سے گزریگا۔ اِس امر پر قوس پ۱ پ۲ کے طول کا کوئی اثر نہیں ہے۔ اس کی بناء پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ کا حاصل اِسراع مستقلاً دائرے کے مرکز کی جانب ہے۔

اِس عمل کے استعمال کرنے میں قوس پ۱ پ۲ کے چھوٹے ہونے کی کوئی حد نہیں ہے (سوائے خط کشی کی دقّت کے)۔ فرض کرو کہ یہ قوس بہت ہی چھوٹی لی گئی ہے تو رفتار کی تبدیلی معلوم کرنے کے لئے عمل م ا ب (شکل ۴۸س) ہو جاتا ہے۔ جس میں م ا اور م ب دونوں ر کے مساوی ہیں اور ا ب رفتار کی تبدیلی ہے۔ (شکل ۴۸ا) میں کُل دائرے کے گرد بہت ہی چھوٹی چھوٹی قوسیں لے کر اِس عمل کو بار بار کرنے سے ایک کثیر الاضلاع حاصل ہوگا جس کے ضلعوں کی تعداد بہت زیادہ ہوگی اور جب قوسیں بے انتہا چھوٹی لی جائیں تو یہ کثیر الاضلاع ایک دائرہ ہو جائیگا جس کا نصف قطر ر ہوگا۔ پس جتنی مدت میں پ شکل ۴۸ (ا) میں ایک گردش پُوری کرتا ہے اُتنی مدت میں رفتار کی تبدیلی شکل ۴۸(س) کے دائرے کے محیط کے مساوی ہوتی ہے یعنی ۲ π ر سمر فی ثانیہ۔ جتنی مدت میں رفتار کی یہ تبدیلی واقع ہوئی ہے اُتنی مدت میں پ ایک گردش پُوری کر لیتا ہے۔ یعنی اِس مدت میں پ شکل ۴۸ (ا) میں

دائرے کے محیط پر ۲πن کا فاصلہ طے کرتا ہے۔ فرض کرو یہ مدت و ثانیہ ہے تو

ف = و ر (صفحہ ۵۰)

۲πن = و ر

یا و = ۲πن / ر ثانیہ ....(۱)

نیز اسراع = رفتار کی تبدیلی / مدتِ وقت

∴ ع = ۲πر ÷ ۲πن / ر

= ر² / ن سمر فی ثانیہ فی ثانیہ ......(۲)

نتیجہ یہ نکلا کہ اگر ایک نقطہ یکساں رفتار سے دائرے کے محیط میں حرکت کر رہا ہو تو اِس میں ایک مستقل اِسراع ہوتا ہے جس کی سمت ہمیشہ دائرے کے مرکز کی طرف ہوتی ہے اور جس کی عددی قیمت ضابطہ بالا سے حاصل ہوتی ہے۔

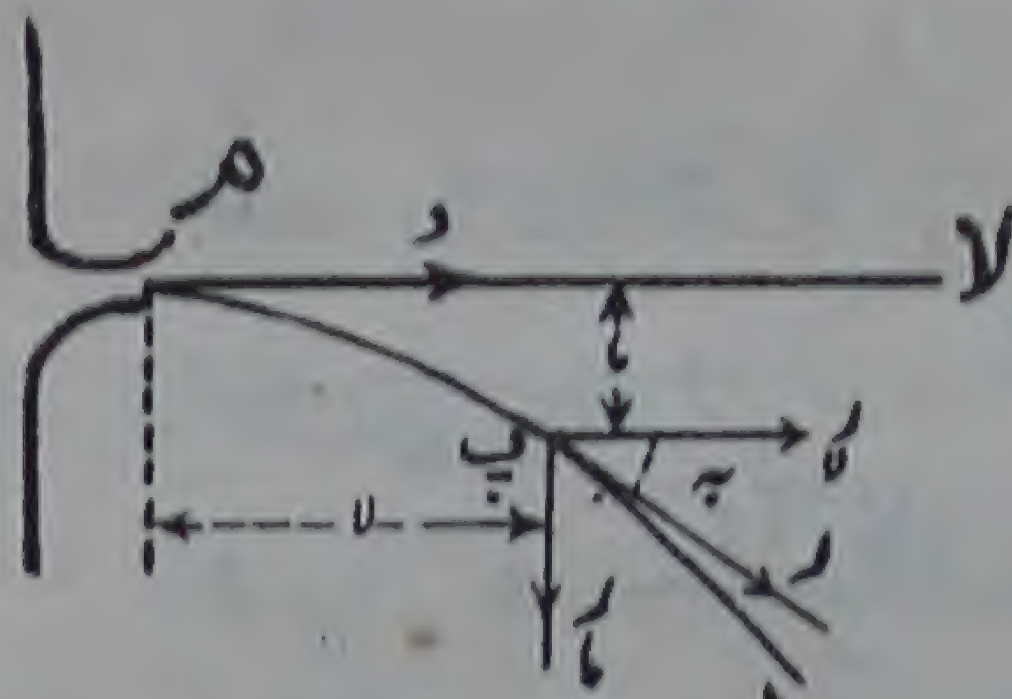
واضح رہے کہ مناسب انگریزی اکائیاں یہ ہیں :—

ر فٹ فی ثانیہ میں، ن فُٹ میں، اور ع فُٹ فی ثانیہ فی ثانیہ میں۔ متعلم مساوات (۲) میں اِن ابعاد کو درج کر کے نتیجہ کی تصدیق کر سکتا ہے۔

اُفق کے متوازی دھار میں حرکت ——

پانی کی دھار جو ایک چھوٹے سُوراخ م سے اُفقاً چھوڑی جائے (شکل ۴۹) رفتار کی سمت کی تبدیلی کی ایک دلچسپ مثال ہے۔

اگر پانی کے ہر ذرّہ میں نیچے کی طرف ایک اِسراع ج نہ ہوتا تو دھار ایک اُفقی خط م لا میں چلتی رہتی۔ لیکن واقعتہً وہ ایک مُنحنی راستہ م پ ا اختیار کرتی ہے۔ کسی ذرّہ کی رفتار ر کو جب کہ وہ ایک ثابت نقطے پ میں سے گزرے، ہم دو جُزئی رفتاروں



شکل ۴۹ء - دھار میں حرکت

سے مرکب مان سکتے ہیں یعنی $\text{ر}_{\text{لا}}$ جس کو ہم ابتدائی رفتار د کے مساوی مان سکتے ہیں اور $\text{ر}_{\text{ما}}$ جو گرنے والے اجسام کے معمولی کُلیوں کے تابع ہے۔ اِن مفروضات میں یہ مضمر ہے کہ کُرۂ ہوائی کی مزاحمت کے اثرات نظر انداز کر دئے گئے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک ذرّہ کو م سے پ تک پہنچنے کے لئے مدّت و درکار ہے اور فرض کرو کہ پ کے محدد لا اور ما ہیں تو

$$\text{لا} = \text{د و} \quad \therefore \quad \text{و} = \frac{\text{لا}}{\text{د}}$$

$$\text{ما} = \frac{1}{2}\text{ج و}^2 = \frac{1}{2}\text{ج}\frac{\text{لا}^2}{\text{د}^2} = \frac{\text{ج}}{2\text{د}^2}\cdot\text{لا}^2 \quad \ldots\ldots(1)$$

پس چونکہ ج اور د مستقل ہیں اِس لئے ما متناسب ہے لا^2 کے۔ بنابریں دھار کا مُنحنی قطعِ مکافی ہے۔ پھر

$$\text{ر}_{\text{لا}} = \text{د} \quad \text{اور} \quad \text{ر}_{\text{ما}} = \text{ج و} = \text{ج}\frac{\text{لا}}{\text{د}}$$

$$\therefore \text{ر} = \sqrt{\text{ر}_{\text{لا}}^2 + \text{ر}_{\text{ما}}^2} = \sqrt{\text{د}^2 + \text{ج}^2\frac{\text{لا}^2}{\text{د}^2}} \quad \ldots\ldots(2)$$

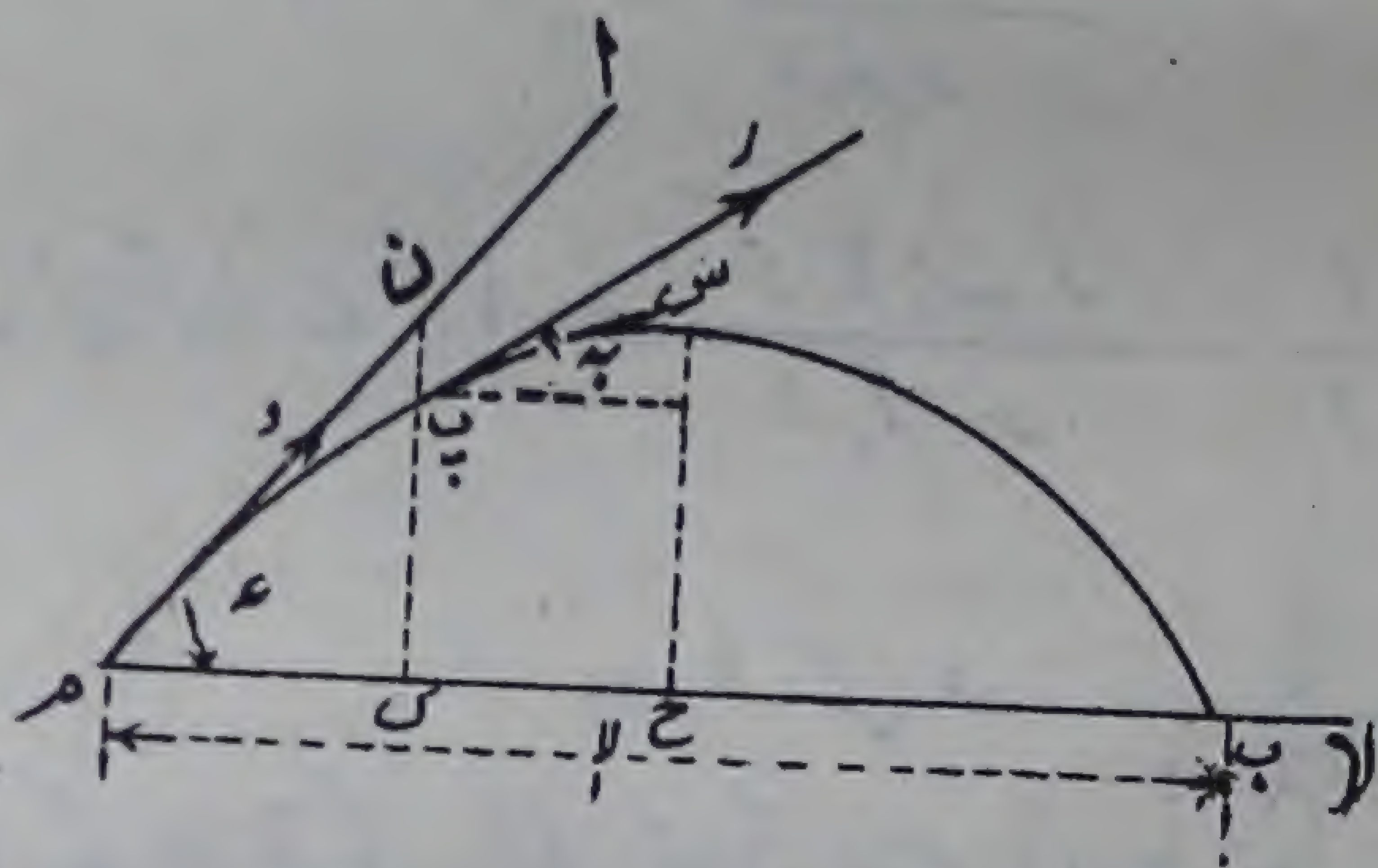
$$\text{نیز مم ب} = \frac{\text{ر}_{\text{لا}}}{\text{ر}_{\text{ما}}} = \frac{\text{د}^2}{\text{ج لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ابتدائی رفتار د کی کسی قیمت کے لئے ہم دھار کے مُنحنی کو (۱) سے ترسیم کر سکتے ہیں۔ کسی وقت کے اختتام پر یا سوراخ سے کسی اُفقی

فاصلے لا پر دھار کے مماس کی سمت (۳) سے معلوم ہو سکتی ہے۔ اور دھار کے کسی نقطہ پر رفتار کی قیمت (۲) سے معلوم ہو سکتی ہے۔

حرکت ایک ذرہ کی جو اُفق سے زاویہ بناتا ہُوا پھینکا جائے :-

حسب شکل ۵۰ ایک ذرہ م سے خطِ مستقیم م ا



شکل ۵۰ ۔ مرمی کی حرکت

میں رفتار د کے ساتھ اُفق سے زاویہ عہ بناتے ہوئے پھینکا جاتا ہے۔ د کے اُفقی اور انتصابی اجزاء علی الترتیب د جم عہ اور د جب عہ ہیں۔ ہوا کی مزاحمت اور ج کی قیمت میں تغیرات کو نظرانداز کر کے یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ د جم عہ پرواز کے کسی نقطہ پر ذرہ کی رفتار کا اُفقی جزء ہے۔ نیز یہ کہ د جب عہ گرنے والے اجسام کے معمولی کُلیات کے تابع ہے۔

فرض کرو کہ ذرہ کے منحنی راستے یا خطِ مرمی پر پ کوئی نقطہ ہے۔ فرض کرو کہ لا اور ی پ کے محدد ہیں۔ اور فرض کرو کہ مدت و میں ذرہ م سے پ تک آتا ہے۔ اگر نیچے کی جانب اِسراع ج نہ ہوتا تو ذرہ و ثانیہ تک چلنے کے بعد م ا کے ایک نقطہ ن پر پہنچتا جو انتصاباً پ کے اُوپر ہے۔

پس م ن = د و

لا = م ن جم عہ

= د و جم عہ .... (۱)

نیز ن پ = $\frac{1}{2}$ ج و^2

ما = ک ن − ن پ

= د و جب عہ − $\frac{1}{2}$ ج و^2 .... (۲)

(۱) سے و = $\frac{\text{لا}}{\text{د جم عہ}}$

(۲) میں درج کرنے سے ما = $\frac{\text{د لا جب عہ}}{\text{د جم عہ}}$ − $\frac{1}{2}$ ج $\frac{\text{لا}^2}{\text{د}^2\text{ جم}^2\text{ عہ}}$

= لا مس عہ − $\frac{\text{ج}}{\text{۲ د}^2\text{ جم}^2\text{ عہ}}$ لا^2 . . . (۳)

ما اور لا کے علاقے کی یہ شکل تبلاتی ہے کہ خطِ مرئی قطعِ مکافی ہے۔
اُفقی ٹپہ م ب ہے (شکل ۵۰)۔ ب پر ما صفر ہے۔ پس (۳) میں ما = ۰ رکھ کر ہم م ب = لا$_1$ کی قیمت دریافت کرسکتے ہیں:۔

لا$_1$ مس عہ − $\frac{\text{ج}}{\text{۲ د}^2\text{. جم}^2\text{ عہ}}$ لا$_1^2$ = ۰

∴ مس عہ − $\frac{\text{ج}}{\text{۲ د}^2\text{. جم}^2\text{ عہ}}$ لا$_1$ = ۰

لا$_1$ = $\frac{\text{۲ د}^2\text{ مس عہ. جم}^2\text{ عہ}}{\text{ج}}$ = $\frac{\text{۲ د}^2\text{ جب عہ جم عہ}}{\text{ج}}$

= $\frac{\text{د}^2\text{ جب ۲ عہ}}{\text{ج}}$ .... (۴)

ٹپہ اُس وقت اعظم ہوگا جبکہ جب ۲ عہ کی قیمت اعظم ہوگی۔ یعنی جبکہ جب ۲ عہ = ۱۔ اُس وقت ۲ عہ ۹۰° کا ہوگا اور عہ کی قیمت ۴۵° ہوگی۔ پس اگر اُفق سے ۴۵° پر پھینکا تو اعظم اُفقی ٹپہ حاصل ہوگا۔

شکل نمبر ۵ میں خطِ مرمی کا بلند ترین نقطہ س ہے اور بہ ظاہر م اور ب کے درمیان منحنی کی تنصیف کرتا ہے۔ اعظم بلندی س ح ہے۔ فرض کرو کہ کُل وقتِ پرواز و_1 ہے تو م سے س تک پہنچنے کے لئے $\frac{1}{2}\text{و}_1$ کی مدت درکار ہوگی۔ اب

$$\text{لا}_1 = \text{د جم عہ} \times \text{و}_1$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{٢ د}^2\ \text{جب عہ جم عہ}}{\text{ج}} = \text{د و}_1\ \text{جم عہ}$$

$$\therefore \quad \text{و}_1 = \frac{\text{٢ د جب عہ}}{\text{ج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

$$\text{اور س تک پہنچنے کی مدت} = \frac{\text{د جب عہ}}{\text{ج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\bar{۵})$$

س پر ابتدائی رفتار کا انتصابی جُز یعنی د جب عہ معدوم ہو جاتا ہے۔ پس مساوات (۱) صفحہ (۵۲) کے رُو سے

$$\text{د}^2\ \text{جب}^2\ \text{عہ} = \text{٢ ج} \times \text{س ح}$$

$$\text{س ح} = \frac{\text{د}^2\ \text{جب}^2\ \text{عہ}}{\text{٢ ج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

پ پر ذرّہ کی رفتار ر اُفق سے زاویہ بہ پر مائل ہے (شکل نمبر ۵)۔ اگر ر کے اُفقی اور انتصابی اجزاء کو $\text{ر}_\text{لا}$ اور $\text{ر}_\text{ہا}$ سے تعبیر کریں تو

$$\text{ر}_\text{لا} = \text{ر جم بہ} = \text{د جم عہ}$$

$$\text{ر}_\text{ہا} = \text{ر جب بہ} = \text{د جب عہ} - \text{ج د}$$

$$\text{ر} = \sqrt{\text{ر}_\text{لا}^2 + \text{ر}_\text{ہا}^2}$$

$$= \sqrt{\text{د}^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ} + (\text{د جب عہ} - \text{ج د})^2}$$

$$= \sqrt{\text{ها د}^2 \left(\text{جم}^2 \text{عه} + \text{جب}^2 \text{عه}\right) - ۲\, \text{د ج و جب عه} + \text{ج}^2 \text{و}^2}$$

$$= \sqrt{\text{ها د}^2 - ۲\, \text{د ج و جب عه} + \text{ج}^2 \text{و}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

$$\text{نیز مس به} = \frac{\text{ی}}{\text{لا}} = \frac{\text{د جب عه} - \text{ج و}}{\text{د جم عه}} \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

چوتھی فصل کی مشقیں

(۱) ایک نقطہ میں ۱۰ سمر فی ثانیہ کی دو جُزئی رفتاریں ہیں۔ احتیاط کے ساتھ شکل کھینچ کر بتلاؤ کہ حاصل رفتاریں کیا ہونگی جب کہ خطوطِ سمت °۶۰، °۱۲۰، °۱۸۰، °۲۷۰ کے زاویئے پر ملیں۔

(۲) ایک دریا میں، ایک کشتی، ایک ایسے مقام کے لئے چلائی جاتی ہے جس کی سمت ساحل سے °۴۲ کا زاویہ بناتی ہے۔ اگر رفتار ۶ فُٹ فی ثانیہ ہو تو ساحل کے متوازی اور ساحل کے علی القوائم جزئی رفتاریں دریافت کرو۔ ساحل کے متوازی ۱۰۰ گز کے فاصلے کو کشتی کتنی مدت میں طے کریگی؟

(۳) ایک مرمی میں کسی آن ۱۶۰۰ فٹ فی ثانیہ اُفقاً اور ۲۰۰ فُٹ فی ثانیہ انتصاباً کی دو جُزئی رفتاریں ہیں۔ حاصلِ رفتار دریافت کرو۔

(۴) ایک جہاز شمال مشرق کی سمت میں ۱۲ میل فی گھنٹہ کے حساب سے رواں ہے۔ ایک شخص عرشے پر کونہً جہاز سے داہنی جانب کی طرف ۴ فُٹ فی ثانیہ کے حساب سے چلتا ہے۔ اُس کی حاصل رفتار کیا ہے؟

(۵) کوئلے کا ایک ٹکڑا ایک ریل چھکڑے کے فرش کے اُوپر ۹ فُٹ کی بلندی سے انتصاباً گرتا ہے۔ چھکڑے کی رفتار ۲ میل فی گھنٹہ ہے۔

تو فرش تک پہنچنے سے پہلے چھکڑے کی اضافت سے کوئلہ کی رفتار معلوم کرو۔

(۶) ایک ریل کی چال ۳۰ میل فی گھنٹہ ہے۔ ریل کی حرکت کی سمت کے متوازی ایک انتصابی مستوی میں بارش کا ایک قطرہ گرتا ہے۔ شکلیں بنا کر قطرے کی حرکت کی وہ سمت دکھلاؤ جو ریل میں بیٹھے شخص کو نظر آئیگی۔

(ا) اگر قطرہ انتصاباً ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گرے۔

(ب) اگر علاوہ (ا) والی رفتار کے قطرے میں ریل کی سمتِ حرکت میں ایک اور جزئی رفتار ۵ فٹ فی ثانیہ کی ہو۔

(س) اگر قطرے میں جزئی رفتار وہی ہو جو (ب) میں بتلائی گئی ہے لیکن سمت مخالف ہو۔

(۷) ایک شخص ایک ٹرام گاڑی کے پیچھے دوڑتا ہے جو ۶ میل فی گھنٹہ کے حساب سے رواں ہے اگر شخص کی رفتار ۸ میل فی گھنٹہ پٹریوں سے ۳۰° کی سمت میں ہو تو ٹرام گاڑی کی اضافت سے اُس کی رفتار کیا ہوگی۔

(۸) ریل کا ایک ڈبہ جس میں معمولی چوطرفہ نشستیں ہیں ۸ فٹ فی ثانیہ کے حساب سے رواں ہے۔ ایک شخص جو اِس ڈبے میں داخل ہونے کو ہے وہ ۱۰ فٹ فی ثانیہ کے حساب سے دوڑتا ہے۔ شکل بنا کر دکھلاؤ کہ چبوترے پر کس سمت میں دوڑنا چاہئیے کہ ڈبے میں داخل ہوتے وقت اُس کی رفتار نشستوں کے متوازی ہو۔ اِس رفتار کی قدر دریافت کرو۔

(۹) ایک شخص ایک موٹر گاڑی میں ۱۵ میل فی گھنٹہ کے حساب سے شمال کی جانب جارہا ہے۔ کاغذ کا ایک پُرزہ اُس کو ہوا میں اُڑتا اور بظاہر گاڑی کی طرف مشرق سے ۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے آتا ہُوا معلوم ہوتا ہے۔ تو ہوا کی رفتار معلوم کرو۔

(۱۰) رفتاروں کا متوازی الاضلاع بیان کرو۔ ایک جہاز ا جنوب سے شمال کی طرف ۲۰ میل فی گھنٹہ کی چال سے رواں ہے۔ ا پر بیٹھے ہوئے ایک شخص کو ایک دُوسرا جہاز ب مغرب سے مشرق کی طرف ۱۵ میل

فی گھنٹہ کی رفتار سے جاتا معلوم ہوتا ہے تو زمین کی اضافت سے ب کی رفتار کی قدر اور سمت معلوم کرو۔

[جامعۂ لندن]

(۱۱) ایک دُخانیہ شمال کی جانب ۸ میل فی گھنٹہ کی شرح سے رواں ہے اور رَو مغرب کی جانب ۳ میل فی گھنٹہ کی شرح سے بہتی ہے۔ شکل کے ذریعہ بتلاؤ کہ دُخانیہ کس سمت میں جا رہا ہے اور جس شرح سے وہ طے مسافت کرتا ہے وہ بھی دریافت کرو۔ اگر ہوا مشرق کی طرف سے ۳ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چل رہی ہو تو شکل میں بتلاؤ کہ مستول پر نصب شدہ جھنڈا کس طرف لہرائیگا۔

[جامعۂ لندن]

(۱۲) ایک طیارہ زمین کی اضافت سے ۹۰ میل فی گھنٹہ کے حساب سے شمال مغرب کی طرف جا رہا ہے اور ہوا شمال کی طرف ۲۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے بالفرض اگر ہوا یکایک رُک جائے تو زمین کی اضافت سے طیارے کی رفتار کی مقدار اور سمت بتلاؤ۔

(۱۳) ریل کی دو پٹریوں م ل اور م ھا میں °۶۰ کا زاویہ ہے۔ ایک ریل م ل پر ۶۰ میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے چلتی ہے۔ ایک دُوسری ریل م ھا پر مساوی رفتار سے چلتی ہے اور پہلی کے گزرنے کے ۲ دقیقہ بعد م سے گزرتی ہے۔ تو پہلی کی اِضافت سے دُوسری ریل کی رفتار معلوم کرو۔ اور شکل کے ذریعہ دونوں ریلوں کا قلیل ترین فاصلہ دکھلاؤ۔

(۱۴) ایک سائکل سوار عین شمال کی طرف ۱۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے جاتا ہے۔ اور ہوا (جو گوشۂ شمال مشرق سے ۶ میل فی گھنٹہ کے حساب سے چلتی ہے) اِس کو شمال سے °۱۵ بجانب شرق سے آتی معلوم ہوتی ہے۔ ترسیماً یا حساباً ہوا کی صحیح سمت دریافت کرو۔ اور اگر وہ سوار واپسی میں اِسی چال سے آئے تو ہوا اِس کو کس سمت میں آتی معلوم ہوگی۔

(۱۵) دو جہاز مستقیم راستوں میں ایسی مستقل رفتاروں سے چل رہے ہیں کہ اگر اِن کی رفتاریں بدلی نہ جائیں تو وہ متصادم ہو جائینگے۔

ثابت کرو کہ ہر جہاز کا آدمی دُوسرے جہاز کو ٹھیک اپنی سیدھ میں آتا دیکھیگا۔
[جامعۂ لندن]

(۱۶) تشریح کرو کہ کسی متحرک ذرّے کی اضافت سے ایک متحرک ذرّے کی رفتار سے کیا مُراد ہے۔ اور اُس کی تخمین کیونکر ہو سکتی ہے۔ مشرق کی طرف ۱۵ بحری میل کے حساب سے چلنے والے جہاز کو ایک دُوسرا جہاز جس کی چال ۱۲ بحری میل ہے، شمال مغرب میں چلتا معلوم ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ موخرالذکر کی حرکت کے لئے دو سمتیں ہیں۔ ترسیماً یا کسی اور طرح سے اِن سمتوں کو دریافت کرو۔ اور ہر صورت میں اضافی رفتار دریافت کرو۔
[جامعۂ لندن]

(۱۷) ایک ریل کے ڈبے میں کسی آن شمال کی طرف ۱۰ میٹر فی ثانیہ کی رفتار ہے۔ ۲۰ ثانیہ بعد رفتار بدل کر ۱۵ میٹر فی ثانیہ بجانب شمال مغرب ہو جاتی ہے۔ رفتار کی تبدیلی اور اِسراع کی اوسط قیمت دریافت کرو۔

(۱۸) ایک نلی بیچ میں سے اِس طرح موڑی جاتی ہے کہ دونوں بازوؤں میں °۳۰ کا زاویہ بن جاتا ہے۔ اگر نلی میں سے پانی ۴ فٹ فی ثانیہ کی یکساں رفتار سے بہے تو شکن سے گزرنے پر رفتار کی مجموعی تبدیلی دریافت کرو۔

(۱۹) بلیرڈ کی ایک گیند ۳ فٹ فی ثانیہ کے حساب سے چل کر گدّی سے ٹکراتی ہے اور اِس کے بعد حرکت کی اوّلین سمت سے °۶۰ کا زاویہ بناتی ہوئی ۲½ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے چلتی ہے۔ رفتار کی تبدیلی دریافت کرو۔

(۲۰) ایک نقطہ ۴۰ سمر قُطر والے دائرے کے محیط پر ۱۲۰ سمر فی ثانیہ کی یکساں رفتار سے چلتا ہے۔ تو دائرے کے مرکز کی جانب مائل اِسراع کی قیمت دریافت کرو۔

(۲۱) ریل کے ایک ڈبے کی چال ۶۰ میل فی گھنٹہ ہے۔ اور وہ ۱۲۰۰ فٹ نصف قُطر والے منحنی کے گرد چلتا ہے۔ تو منحنی کے مرکز کی جانب مائل اسراع کی قیمت دریافت کرو۔

(۲۲) کسی حوض کے انتصابی رُخ کے ایک چھوٹے سے سُوراخ سے پانی کی ایک دھار نکلتی ہے۔ جس کی اُفقی رفتار ۸ فٹ فی ثانیہ ہے تو دھار

کے کسی ذرّے کی حاصل رفتار دھار کے سوراخ سے خارج ہونے کے ۲ ثانیہ بعد معلوم کرو۔
(۲۳) سوال ۲۲ میں خارج ہونے کے ا،۲،۳،۴، اور ۵ ثانیہ کے وقفوں پر دھار کے کسی ذرّے کی وضع دریافت کرو۔ اِن حاصل کردہ معلومات سے ایک ترسیم بناؤ جس میں دھار کی شکل دکھاؤ۔

ج = ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ مانو۔

(۲۴) زمین سے ۲۵ فٹ اُونچی ایک توپ سے اُفقاً ایک گولی ۱۲۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکی جاتی ہے۔ تو جس مقام پر گولی زمین پر جا لگتی ہے توپ سے اُس کا اُفقی فاصلہ دریافت کرو۔ نیز وہ زاویہ بھی دریافت کرو جو اِس کی سمتِ حرکت اُفقی سے بناتا ہے۔

(۲۵) ایک مرمیٰ ۲۲۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ اگر زاویۂ ارتفاع علی الترتیب ۳۰°، ۴۰°، ۴۵°، ۵۰° اور ۶۰° کے ہوں تو اُفقی ٹپہ، وقت پرواز اور اعظم بلندی دریافت کرو۔ کرۂ ہوائی کے اثرات کو نظر انداز کردو۔

ج = ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ مانو۔

(۲۶) ۲۰۰ فٹ بلند ایک انتصابی پہاڑی کے دامن سے ۴۰۰ فٹ کے اُفقی فاصلہ پر ایک توپ رکھی ہے جو ۲۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ایک مرمیٰ یا گولا پھینک سکتی ہے۔ تو توپ کا زاویۂ ارتفاع معلوم کرو تاکہ گولا پہاڑی کی چوٹی سے چھوتا ہُوا نکل جائے۔ کرۂ ہوا کے اثرات نظر انداز کردو۔

(۲۷) ۷ فٹ اُونچے ایک نقطہ سے ایک گولا ۵۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ گولے کو اُفقی سے کس زاویے پر پھینکنا چاہیئے کہ نقطہ رمیٰ سے ۳۰ فٹ اُفقی فاصلے پر ۳۵ فٹ اُونچے ایک جال کی چوٹی سے گولا چھوتا ہُوا نکل جائے۔ کرۂ ہوائی کے اثرات نظر انداز کردو۔

(۲۸) ایک بھاری ذرّہ رفتار س سے اُفقی سے زاویۂ طہ پر پھینکا جاتا ہے تو مابعد کے کسی لمحہ میں اُس کی وضع اور رفتار دریافت کرنے کے لئے مساواتیں حاصل کرو۔ ایک گھومتی ہوئی چھتری کی اُفقی کناری سے پانی کے

قطرے مماساً پھینکے جاتے ہیں ۔ کناری ۳ فٹ قُطر کی ہے ۔ زمین سے ۴ فُٹ کی بلندی پر ہے ۔ اور ۳۲ ثانیوں میں ۱۴ چکّر کرتی ہے ۔ تو ثابت کرو کہ پانی کے قطرے زمین سے ۵ فُٹ قُطر والے دائرے میں ملتے ہیں ۔

[جامعۂ مدراس]

پانچویں فصل

زاویئی رفتار اور اسراع

زاویئی رفتار ـــــ فرض کرو کسی خطِ مستقیم میں ایک نقطہ ثابت ہے۔ اور فرض کرو کہ یہ خطِ مستقیم اِس نقطے کے گرد ایک ثابت مستوی مثلاً کاغذ کے مستوی میں گھومتا ہے۔ زاویہ بنانے کی شرح خط کی **زاویئی رفتار** کہلاتی ہے۔ زاویئی رفتار کی پیمائش فی منٹ یا فی ثانیہ گردشوں سے ہو سکتی ہے۔ بیشتر اغراض کے لئے سہولت اِسی میں ہے کہ زاویئی رفتار نیمقطری فی ثانیہ میں پیمائش کی جائے۔ اِس کو ظاہر کرنے کے لئے اکثر رمز ن استعمال کرتے ہیں۔

چونکہ ایک کامل گردش میں ۲ ㅠ نیمقطری ہوتے ہیں اِس لئے ن اور ر گردش فی ثانیہ نہ میں ربط حسبِ ذیل ہے :-

$$ن = \frac{نہ}{۶۰} ۲ ㅠ$$

$$= \frac{ㅠ نہ}{۳۰} \text{ نیمقطری فی ثانیہ}$$

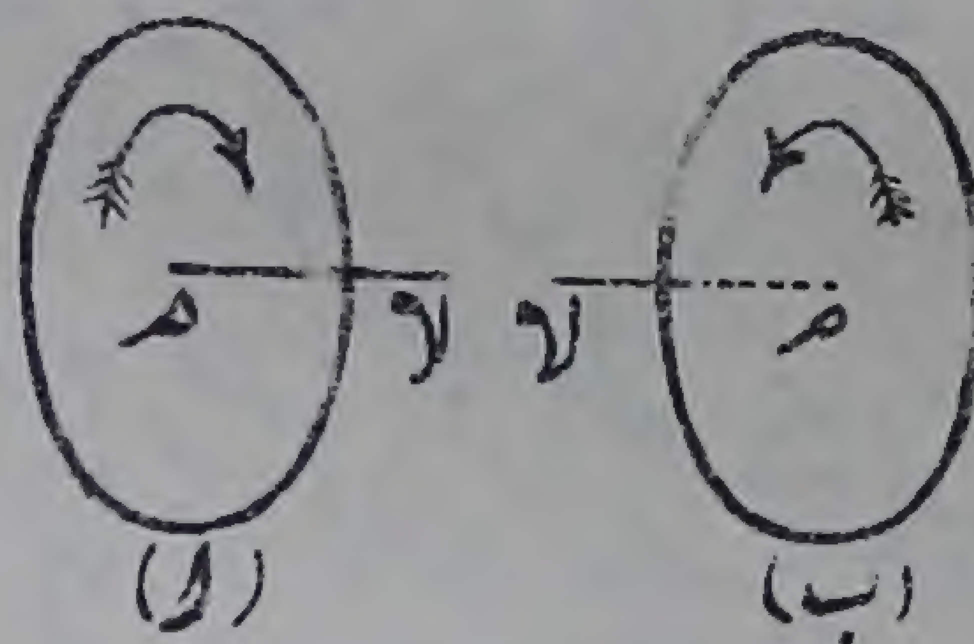
یکساں زاویئی رفتار میں وقت کی مساوی مدتوں میں مساوی زاویے بنتے ہیں۔ اگر یہ شرط پوری نہ ہو تو زاویئی رفتار متغیر ہے اور پھر گھومتے خط میں **زاویئی اِسراع** ہوتا ہے۔

زاویئی رفتار **سمتِ ساعت یا خلاف سمتِ ساعت**

میں ہو سکتی ہے اور یہ اِس پر منحصر ہے کہ دیکھنے والے کو خط گھڑی کی سوئیوں کی سمت حرکت میں یا اُس کے خلاف گھومتا دکھائی دے۔

واضح رہے کہ اگر دو مُشاہد یا دیکھنے والے ایسے ہوں کہ گردش کے مستوی کے ہر دو جانب ایک مُشاہد ہو تو زاویئی رفتار ایک مُشاہد کو سمت ساعت میں اور دُوسرے کو خلاف سمت ساعت میں نظر آئیگی۔

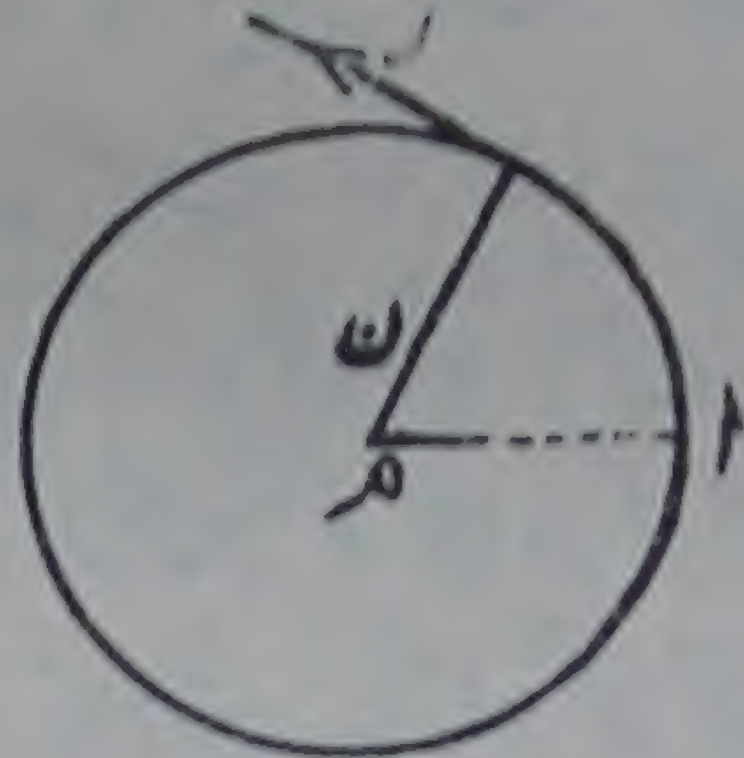
جس مستوی میں ایک جسم گردش کر رہا ہے اُس کے علی القوائم ایک خطِ مستقیم لے کر کسی دی ہوئی زاویئی رفتار کو ظاہر کر سکتے ہیں۔ ایک منتخبہ پیمانے کے مطابق خط کا طول زاویئی رفتار کو ظاہر کریگا۔ اور خط، گردش کے مستوی کے اِس طرف یا اُس طرف کھینچا جاتا ہے جو محوری گردش کی جہت پر موقوف ہے۔ چنانچہ شکل ۱۵ (ا) میں



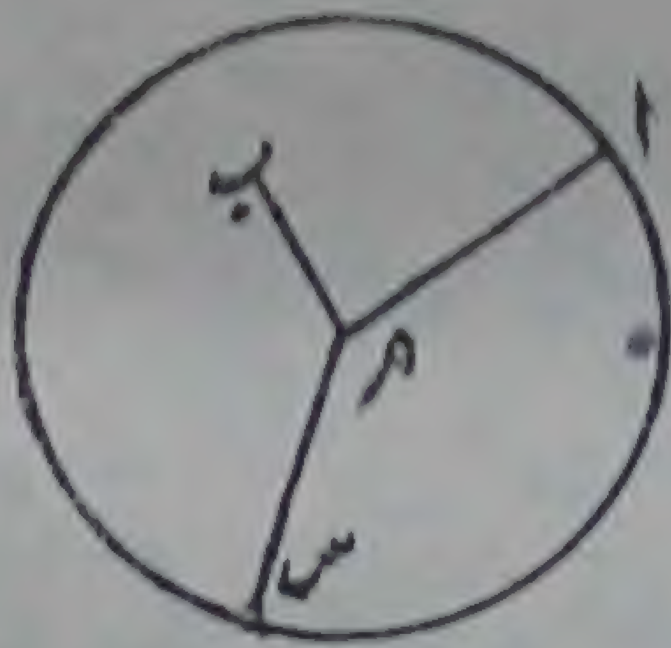
شکل ۱۵۔ زاویئی رفتار کی تعبیر

ایک شخص کو جو گھومتے قرص کے داہنی جانب ہے یہ معلوم ہوتا ہے کہ زاویئی رفتار سمتِ ساعت میں ہے اور وہ قرص کے مستوی پر اپنی جانب ایک عمود ھ لا کھینچتا ہے۔ شکل ۱۵ (ب) میں شخص کو زاویئی رفتار خلاف سمتِ ساعت معلوم ہوتی ہے اور اب ھ لا قرص کی دُوسری جانب کھینچا جاتا ہے۔ طالب علم کو چاہیئے کہ آزمائش سے اِس بات کی تصدیق کرے کہ ایک گھومتے قرص کے ہر دو جانب دو شخص ھ لا کو قرص کے ایک ہی جانب کھینچیں گے۔

خطی اور زاویئی رفتار میں تعلق ——— فرض کرو کہ ح ا (شکل ۵۲) یکساں زاویئی رفتار سے ح کے گرد گھومتا ہے۔



شکل ۵۲
خطی اور زاویئی رفتاروں میں تعلق۔



شکل ۵۳
تمام قطری خطوط کی زاویئی رفتار ایک ہی ہے۔

کسی آن نقطۂ ا میں ایک خطی رفتار ر، ح ا کے علی القوائم موجود ہے۔ فرض کرو کہ ا جو دائرہ بناتا ہے اُس کا نصف قطر ن ہے۔ ایک ثانیہ میں ا کے طے کردہ قوس کا طول ر ہے۔ اور اِس قوس سے دائرے کے مرکز پر بنا ہُوا زاویہ ر/ن نیمقطری ہوگا۔ بشرطیکہ ر اور ن کی پیمائش کے لئے ایک ہی طولی اِکائی استعمال کی جائے۔ پس ح ا ایک ثانیہ میں ر/ن نیمقطری طے کرتا ہے۔ اور زاویئی رفتار

ز = ر/ن نیمقطری فی ثانیہ .... (۱)

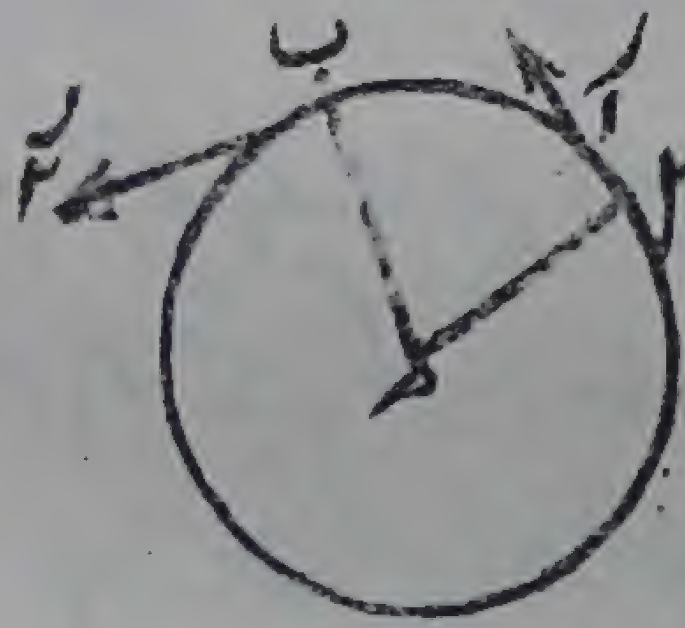
شکل ۵۳ میں ایک پہیہ کاغذ کے مستوی میں ح پر کے ایک محور پر جو اِس مستوی پر عمود ہے گھومتا ہے۔ یہ واضح ہے کہ چند ثابت نقطوں تک جو نصف قطر مثلاً ح ا، ح ب، ح س، وغیرہ کھینچے جائینگے اُن سب میں ایک ہی زاویئی رفتار ہوگی۔ پس ایک محور پر گھومنے والے جسم کی زاویئی رفتار جسم کے کسی نقطہ کی خطی رفتار کو اِس نقطہ سے گردش کے محور تک کھینچے ہوئے نصف قطر پر تقسیم کرنے سے

حاصل ہو سکتی ہے۔

زاویئی اِسراع —— زاویئی رفتار کی تبدیلی کی شرح کا نام زاویئی اِسراع ہے اور زاویئی رفتار کی تبدیلی کو صَرف کردہ وقت سے تقسیم کرنے سے اِس کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے چنانچہ اگر ایک گھومتے خط کی زاویئی رفتار مدت و میں $نما_1$ سے $نما_2$ نیمقطری فی ثانیہ ہو جائے اور اگر یہ تبدیلی یکساں شرح سے عمل میں آئی ہے تو

$$زاویئی\ اِسراع = فہ = \frac{نما_2 - نما_1}{و}$$ نیمقطری فی ثانیہ فی ثانیہ .....(۲)

شکل ۵۴ میں ایک خط ھ کے گرد کاغذ کے مستوی میں متغیر



شکل ۵۴ ۔ زاویئی اِسراع

زاویئی رفتار سے گھومتا ہے۔ جب وہ ھ ا سے گزرتا ہے تو اُس کی زاویئی رفتار $نما_1$ ہے۔ اور پھر زاویئی رفتار یکساں شرح سے بڑھتی ہے اور جب ھ ب سے گزرتا ہے تو اُس کی قیمت $نما_2$ ہے۔ فرض کرو کہ ھ ا سے ھ ب تک آنے کی مدت و ثانیہ ہے۔ تو

$$زاویئی\ اِسراع = فہ = \frac{نما_2 - نما_1}{و}$$

فرض کرو کہ ا اور ب کی خطی رفتاریں علی الترتیب $ر_1$ اور

$ر_۲$ ہیں اور فرض کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ن ہے تو

$$ز_۱ = \frac{ر_۱}{ن} \quad \text{اور} \quad ز_۲ = \frac{ر_۲}{ن}$$

$$\therefore \; فہ = \frac{ر_۲ - ر_۱}{ن \, و}$$

اب $\left(\frac{ر_۲ - ر_۱}{و}\right)$ نقطہ ۱ کا مماسی اسراع مع ہے جب کہ وہ ۱ سے ب تک حرکت کرتا ہے۔

لہٰذا $$فہ = \frac{مع}{ن} \quad .... (۳)$$

واضح رہے کہ یہ قاعدہ اُس قاعدے کے متناظر ہے جس کی رُو سے خطی رفتار سے زاویئی رفتار معلوم ہوتی ہے۔

"کسی گھومتے جسم" کے تمام نصف قطر میں ایک ہی زاویئی اسراع ہوتا ہے۔ پس جسم کے کسی نقطہ پر مماسی اسراع کو محورِ گردش سے اس نقطہ تک کھنچے ہوئے نصف قطر پر تقسیم کرنے سے زاویئی اسراع کی قیمت دریافت ہوسکتی ہے۔

زاویئی حرکت کی مساواتیں —— تیسری فصل میں جس طریقے پر مستقیم حرکت کی مساواتیں حاصل کی گئی ہیں اُسی طریقے پر زاویئی حرکت کی مساواتیں حاصل ہوسکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک خط یکساں زاویئی رفتار ز نیمقطری فی ثانیہ سے گھومتا ہے اور فرض کرو کہ و ثانیوں میں زاویہ عہ بنتا ہے تو

$$عہ = ز \, و \; \text{نیمقطری} \quad .... (۱)$$

فرض کرو ایک خط سکون سے آغاز کر کے ایک زاویئی اسراع فہ نیمقطری فی ثانیہ فی ثانیہ سے گھومتا ہے۔ تو و ثانیہ کے اختتام پر زاویئی رفتار ز کی قیمت حسب ذیل ہوگی:—

$$ز = فہ \, و \; \text{نیمقطری فی ثانیہ} \quad .... (۲)$$

اوسط زاویئی رفتار $(ز_ا)$

نساط = (۰ + نسا) / ۲ = ۱/۲ نسا ہے

اور عہ = نساط و = ۱/۲ نسا و نیمقطری .... (۳)

(۲) سے نسا کی قیمت درج کرنے پر

عہ = ۱/۲ فہ و × و = ۱/۲ فہ و۲ نیمقطری .... (۴)

پھر (۲) سے و = نسا / فہ ∴ و۲ = نسا۲ / فہ۲

اس قیمت کو (۴) میں درج کرنے سے

عہ = ۱/۲ فہ نسا۲ / فہ۲ = نسا۲ / ۲ فہ

∴ نسا۲ = ۲ فہ عہ .... (۵)

مستقیم حرکت کی مساواتوں سے ان مساواتوں کی مماثلت عیاں ہے۔ اگر کسی خط کی ابتدائی زاویئی رفتار نسا ہو اور زاویئی اسراع فہ ہو تو اس کے لئے بھی اسی طریقے پر مساواتیں حاصل ہوسکتی ہیں۔ یہ مساواتیں حسب ذیل ہیں:۔

نسا۲ - نسا۱ = فہ و نیمقطری فی ثانیہ .... (۶)

عہ = ((نسا۲ + نسا۱) / ۲) و نیمقطری .... (۷)

عہ = نسا۱ و + ۱/۲ فہ و۲ .... (۸)

نسا۲۲ - نسا۱۲ = ۲ فہ عہ .... (۹)

مثال ۱:۔ ایک پہیہ سکون سے آغاز کرتا ہے اور ۴۰ ثانیوں میں ۳۰۰ چکر فی دقیقہ کی چال حاصل کرلیتا ہے تو زاویئی اسراع دریافت کرو۔ پہیے نے ۴۰ ثانیوں میں کتنے چکر کئے؟

ن = ۳۰۰/۶۰ × ۲ ۲۲ = ۳۱۰
= ۳۱٫۴۱ نیمقطری فی ثانیہ

فہ = ن/و = ۳۱٫۴۱/۴۰

= ۰٫۷۸۵ نیمقطری فی ثانیہ فی ثانیہ

اوسط زاویئی رفتار = ۳۰۰/۲ = ۱۵۰ چکّر فی دقیقہ

= ۱۵۰/۶۰ = ۲٫۵ " " ثانیہ

∴ تعداد چکّر مطلوبہ = ۲٫۵ × ۴۰

= ۱۰۰

مثال ۲ — ایک لوکوموٹف (حرّاکہ) کا چلانے والا پہیہ ۶ فٹ قُطر کا ہے۔ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ پہیہ پٹری پر سے پھسلتا نہیں ہے تو پہیہ کی زاویئی رفتار کیا ہوگی جب کہ اِنجن ۶۰ میل فی گھنٹہ کے حساب سے جا رہا ہو؟

حرّاکہ کی رفتار = ۵۲۸۰×۶۰/۶۰×۶۰ = ۸۸ فٹ فی ثانیہ

چونکہ ایک ثانیہ میں ۸۸ فٹ کا فاصلہ طے ہُوا ہے تو ایک ثانیہ میں پہیہ کے چکّر کی تعداد اِس طرح معلوم کر سکتے ہیں کہ ۸۸ فٹ پٹری کو پہیہ کے محیط پر لپٹا سمجھیں۔

پٹری کی لپیٹ کی تعداد = ۸۸/۲ ق ۲ = ۸۸/۲ ۲ ۶

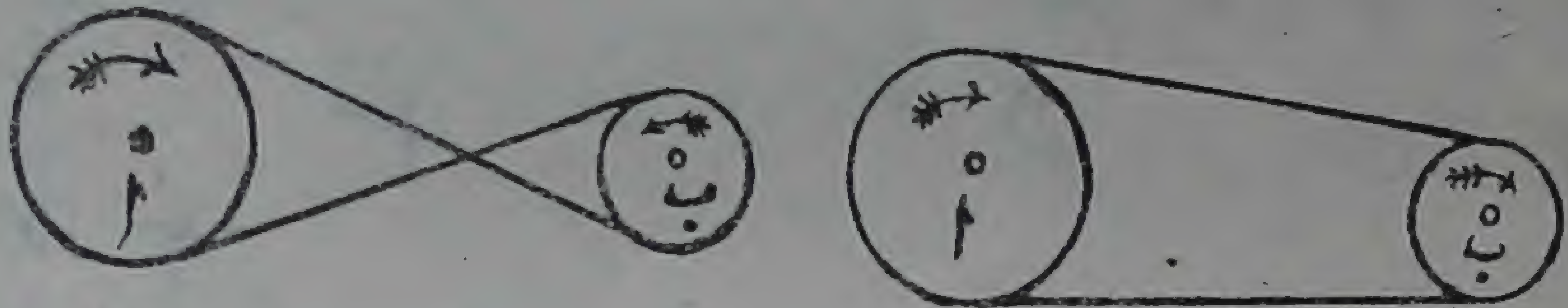
∴ تعداد چکّر فی ثانیہ = ۸۸×۷/۲۲×۶ = ۴٫۶۷

∴ ن = ۴٫۶۷ × ۲ ۲۲

= ۲۹٫۳۳ نیمقطری فی ثانیہ

محوری حرکت کا انتقال:— کارخانوں میں اکثر کلیں پیٹیوں کے ذریعے سے چلتی ہیں۔ ہر دھرے میں ایک چرخی ہوتی ہے۔

اور مثل شکل ۵۵ کے چرخیوں پر ایک پٹی چڑھا دی جاتی ہے۔ اگر



شکل ۵۵۔ کھلی پیٹی

شکل ۵۶۔ قینچی پیٹی یا بند پیٹی

یہ منظور ہو کہ دونوں دُھرے ایک ہی سمت میں محوری حرکت کریں تو پیٹی کھلی رہتی ہے۔ جیسا شکل ۵۵ میں ہے۔ شکل ۵۶ کی طرح پیٹی کو قینچی کرنے سے ایک دُھرا دوسرے کو مخالف سمت میں گھما سکتا ہے۔ پٹی اور چرخیوں میں پھسل کو نظرانداز کردیں تو یہ ظاہر ہے کہ جو خطی رفتار پیٹی کی ہوگی وہی رفتار چرخیوں کے محیطوں پر کے نقطوں کی ہوگی۔ فرض کرو یہ رفتار $س$ ہے اور $ن_ا$ اور $ن_ب$ چرخیوں کے نصف قطر ہیں تو

$$\text{ا کی زاویئی رفتار} = ض_ا = \frac{س}{ن_ا}$$

$$\text{ب کی زاویئی رفتار} = ض_ب = \frac{س}{ن_ب}$$

$$\therefore \frac{ض_ا}{ض_ب} = \frac{ن_ب}{ن_ا}$$

پس چرخیوں کی زاویئی رفتاریں اِن کے نصف قطروں یا قطروں کے بالعکس متناسب ہیں۔

شکل ۵۷ میں جو ترتیب دکھائی گئی ہے اِس سے زاویئی رفتار کی نسبت بہت بڑھائی جاسکتی ہے۔ ا، ب کو چلاتی ہے اور ایک چرخی س، جو اُسی دھرے پر نصب ہے جس پر ب ہے، د کو چلاتی ہے۔ اسی طرح ی سے ف چلتی ہے۔ چرخیوں کو

دو دو کر کے لینے سے

$$\frac{ن_ا}{ن_ب} = \frac{\mathbf{ن}_ب}{\mathbf{ن}_ا} ، \frac{ن_س}{ن_د} = \frac{\mathbf{ن}_د}{\mathbf{ن}_س} ، \frac{ن_ی}{ن_ف} = \frac{\mathbf{ن}_ف}{\mathbf{ن}_ی}$$

حاصل ہوتا ہے۔

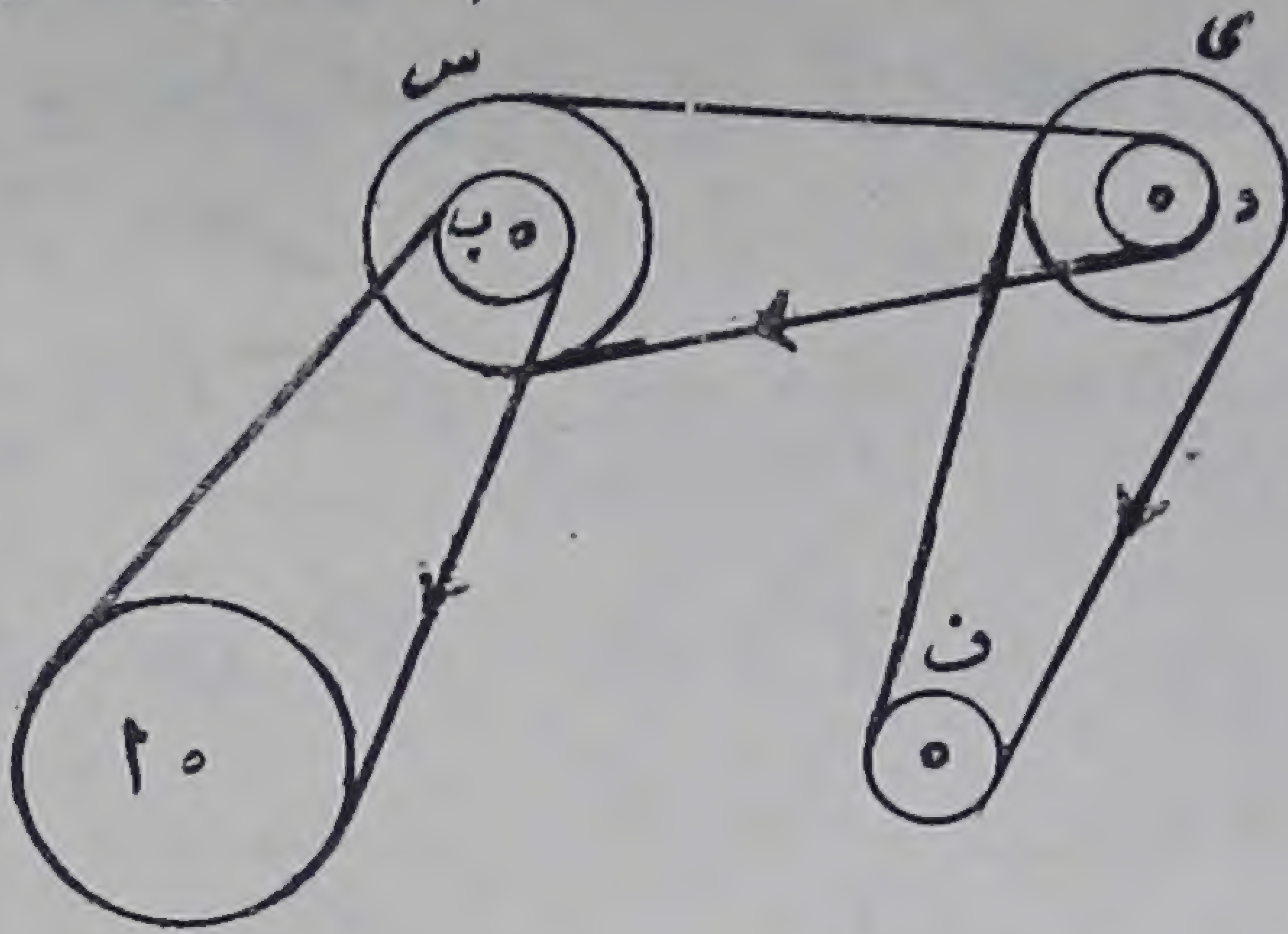
نیز $ن_ب = ن_س$ ، اور $ن_د = ن_ی$

پس

$$\frac{ن_ا \times ن_س \times ن_ی}{ن_ب \times ن_د \times ن_ف} = \frac{\mathbf{ن}_ب \times \mathbf{ن}_د \times \mathbf{ن}_ف}{\mathbf{ن}_ا \times \mathbf{ن}_س \times \mathbf{ن}_ی}$$

یا

$$\frac{ن_ا}{ن_ف} = \frac{\mathbf{ن}_ب \times \mathbf{ن}_د \times \mathbf{ن}_ف}{\mathbf{ن}_ا \times \mathbf{ن}_س \times \mathbf{ن}_ی}$$



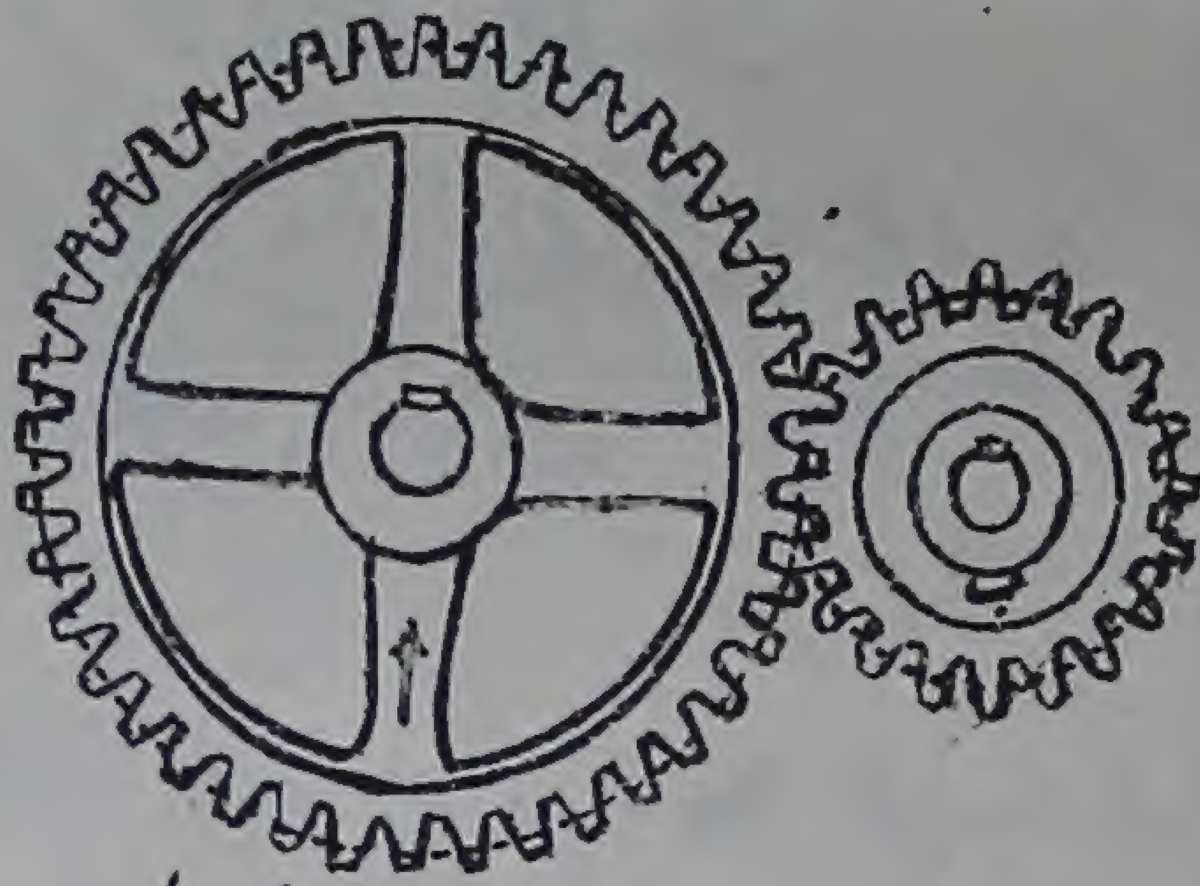
شکل ۵۷ - پیٹی چرخی ترتیب

پس یہ قاعدہ حاصل ہُوا:- پہلی اور آخری چرخی کی زاویئی رفتاروں کی کی نسبت ، چلاؤ چرخیوں کے نصف قطروں یا قطروں کے حاصل ضرب مقسوم بہ چالو چرخیوں کے نصف قطروں یا قطروں کے حاصلِ ضرب کے مساوی ہے۔

دندانہ دار پہیے :- دندانہ دار پہیے (شکل ۵۸) اُس وقت استعمال کئے جاتے ہیں جب کہ پھسل نہ ہونا چاہیئے۔ دندانے نقطہ دار

خطوں سے ظاہر شدہ دو اُستوانوں پر بنے خیال کئے جا سکتے ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ اُستوانوں کے محیطوں پر نقطوں کی خطی رفتاریں مساوی ہیں۔ اِس لئے اِس کے لئے بھی وُہی قاعدہ ہوگا جو دو پیٹی چرخیوں کے لئے تھا۔ یعنی

$$\frac{ن_ا}{ن_ب} = \frac{ن_ب}{ن_ا}$$

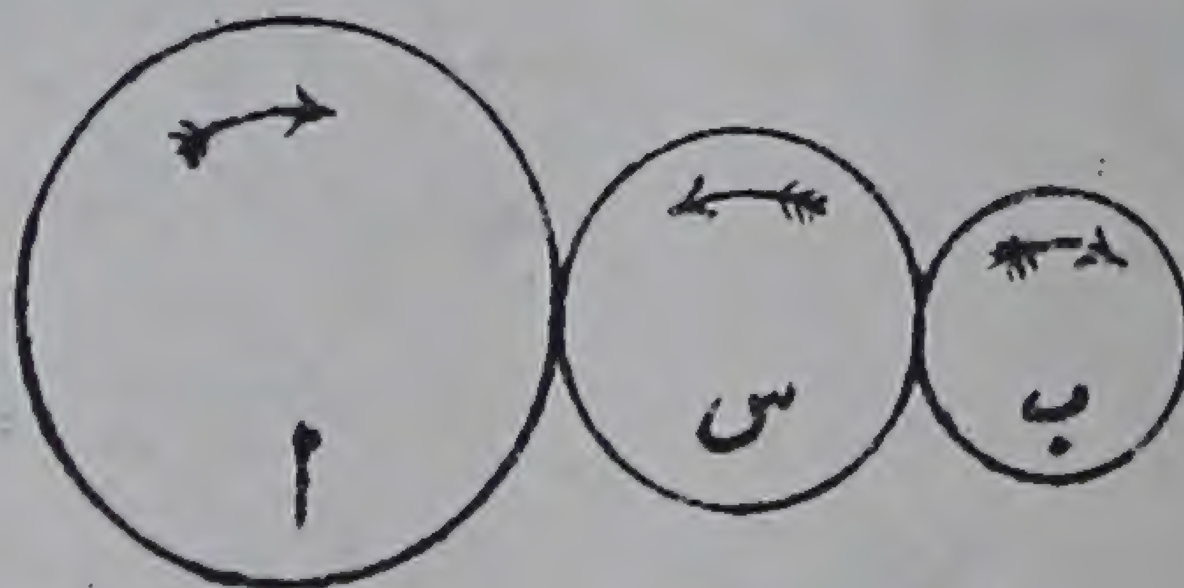


شکل ۵۸۔ دندانہ دار پہیے گیرائی میں

مزید براں دندانوں کی تعداد $ت_ا$ اور $ت_ب$ محیطوں کے متناسب ہے اور اِس لئے اُستوانوں کے نصف قطر کے۔ لہٰذا

$$\frac{ن_ا}{ن_ب} = \frac{ت_ب}{ت_ا}$$

شکل ۵۸ میں جو پہیے دکھائے گئے ہیں وہ مخالف سمتوں میں گھومتے ہیں۔ اگر یک جہتی زاویئی رفتاریں درکار ہوں تو ایک معطل پہیہ س بیچ میں داخل کر دیا جاتا ہے (شکل ۵۹)۔



شکل ۵۹ معطل پہیہ کا استعمال

اِن تین اُستوانوں کے محیطوں کی خطی رفتاریں اب بھی مساوی ہیں - لہٰذا مثلِ سابق

$$\frac{\text{ن}_{\text{ا}}}{\text{ن}_{\text{ب}}} = \frac{\text{ت}_{\text{ب}}}{\text{ت}_{\text{ا}}}$$

پہیوں کا ایک سلسلہ — گھڑیوں اور دُوسری صنعتوں میں پہیوں کا جو سلسلہ استعمال کیا جاتا ہے وہ شکل ۶۰ میں دکھایا گیا ہے - پہیوں کو دو دو کر کے لینے سے

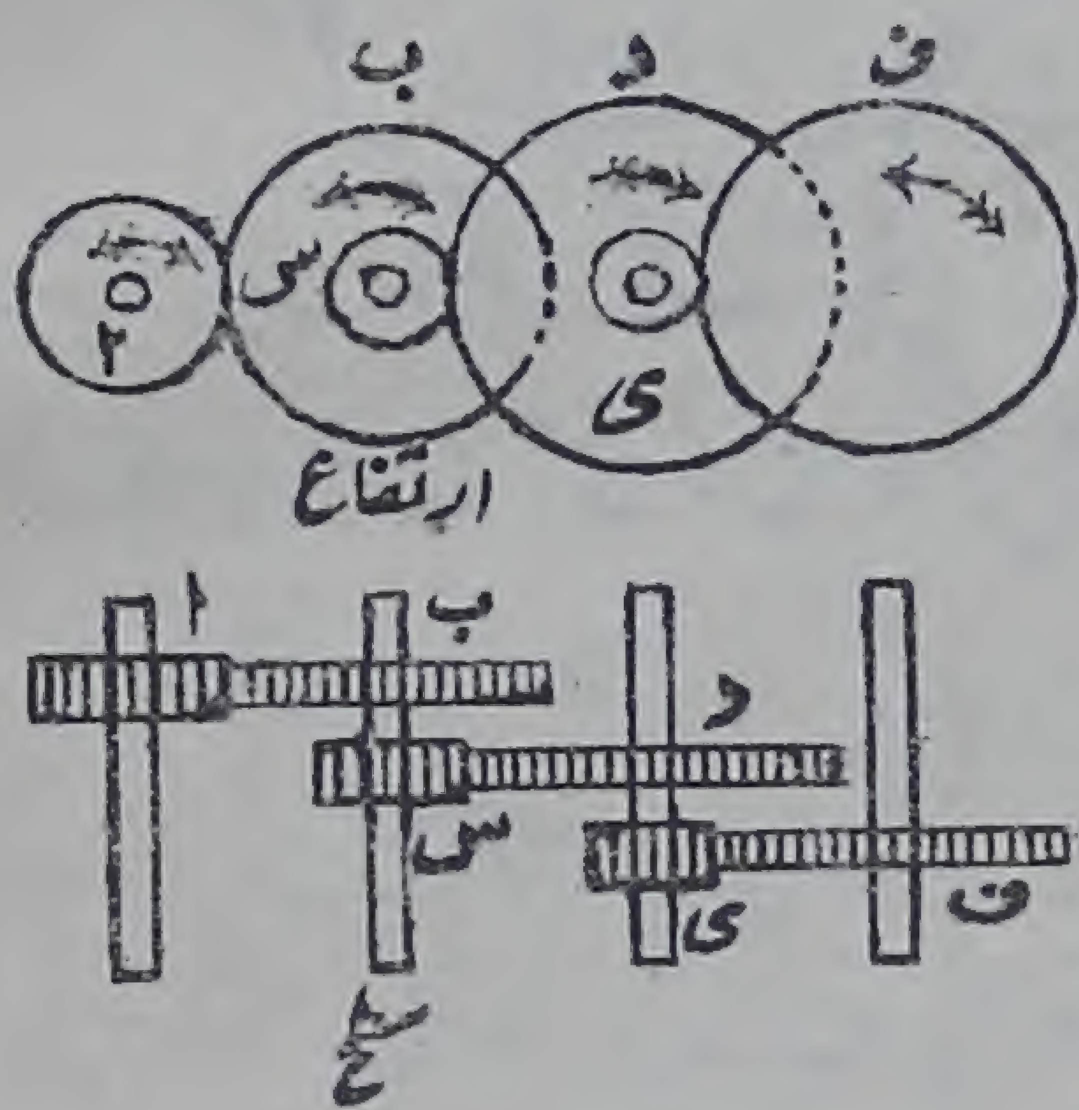
$$\frac{\text{ن}_{\text{ا}}}{\text{ن}_{\text{ب}}} = \frac{\text{ت}_{\text{ب}}}{\text{ت}_{\text{ا}}} \text{ ، } \frac{\text{ن}_{\text{س}}}{\text{ن}_{\text{د}}} = \frac{\text{ت}_{\text{د}}}{\text{ت}_{\text{س}}} \text{ ، } \frac{\text{ن}_{\text{ی}}}{\text{ن}_{\text{ف}}} = \frac{\text{ت}_{\text{ف}}}{\text{ت}_{\text{ی}}}$$ حاصل ہوتا ہے

نیز $\text{ن}_{\text{ب}} = \text{ن}_{\text{س}}$ اور $\text{ن}_{\text{د}} = \text{ن}_{\text{ی}}$

لہٰذا $$\frac{\text{ن}_{\text{ا}} \times \text{ن}_{\text{س}} \times \text{ن}_{\text{ی}}}{\text{ن}_{\text{ب}} \times \text{ن}_{\text{د}} \times \text{ن}_{\text{ف}}} = \frac{\text{ن}_{\text{ا}}}{\text{ن}_{\text{ف}}} = \frac{\text{ت}_{\text{ب}} \times \text{ت}_{\text{د}} \times \text{ت}_{\text{ی}}}{\text{ت}_{\text{ا}} \times \text{ت}_{\text{س}} \times \text{ت}_{\text{ی}}}$$

واضح رہے کہ یہ نتیجہ اُس نتیجے کے مماثل ہے جو شکل ۵۸ کی پیٹیوں کے سلسلے کے لئے حاصل ہُوا تھا۔

پھسل سے بچنے کے لئے پیٹیوں کے بجائے کبھی کبھی زنجیرے بھی استعمال ہوتے ہیں۔ معمولی بائیسکل اِس کی ایک مثال ہے۔ زنجیر کے دندانہ دار پہیوں کے محیطوں کی خطی رفتار زنجیر کی کڑیوں کے مرکزوں پر وُہی ہے جو زنجیر کی ہے — پس دو پیٹی چرخیوں کی طرح یہاں بھی وُہی قاعدہ جاری



شکل ۶۰ - پہیوں کا سلسلہ

ہوگا یعنی

$$\frac{ن_ا}{ن_ب} = \frac{ن_ب}{ن_ا}$$

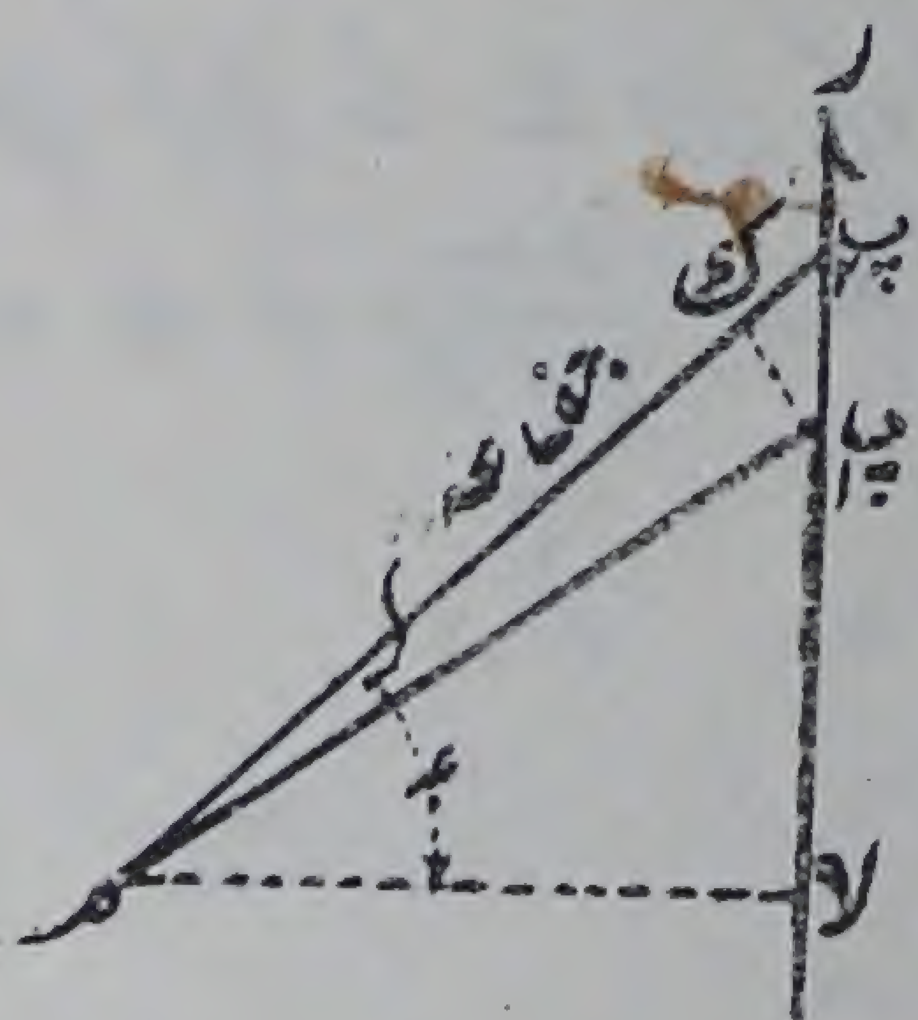
مزید براں پہیوں کے دندانوں کی تعداد محیطوں کے تمناسب ہے اور اس لئے پہیوں کے نصف قطروں کے، پس

$$\frac{ن_ا}{ن_ب} = \frac{ت_ب}{ت_ا}$$

شروع شروع میں بائیسکلوں میں اگلے پہیے کے دُھرے پر کرینک لگا کر چلانے کا کام نکالتے تھے۔ اس طرح کہ کرینک کی ایک گردش پہیہ کو ایک گردش دیتی تھی اور بائیسکل بقدر پہیے کے محیط کے مساوی فاصلہ کے بڑھ جاتی تھی۔ جب یہ کہا جاتا ہے کہ جدید بائیسکل کا گیرا اس قدر ہے مثلاً ۷۰، تو اس سے مُراد یہ ہوتی ہے کہ کرینکوں کی ایک گردش کے مقابلے میں بائیسکل اِتنا فاصلہ طے کریگی جو پُرانی وضع کی مشین طے کرتی بشرطیکہ اِس کا چلاؤ پہیہ ۷۰ اِنچ قُطر کا ہوتا۔ فرض کرو کہ محفوظ بائیسکل کے پچھلے پہیہ کا قُطر ق ہے اور کرینک کے زنجیری پہیے اور چھوٹے زنجیری پہیے کے دندانوں کی تعداد علی الترتیب $ت_ا$ اور $ت_ب$ ہے تو

$$گیرا = ق = \frac{ت_ا}{ت_ب}\, ق$$

مثال :- متغیر زاویئی رفتار ــــــ شکل ع۶۱ میں ایک نقطہ یکساں رفتار ر سے خطِ مستقیم لا پ میں حرکت کرتا ہے۔ کسی آن ایک ثابت نقطہ ھ سے متحرک نقطہ تک کھنچے ہوئے سمتی نیم قطر ھ پ$_ا$ کی زاویئی رفتار اِس طرح دریافت ہو سکتی ہے:-



شکل ۶۱۔ متغیر زاویئی رفتار

نقطے کی دو متصل وضعیں پ۱ اور پ۲ لو اور ان کو بہت ہی قریب مانو۔ م پ۱ اور م پ۲ کو ملاؤ اور م پ۲ پر عمود پ۱ ک کھینچو۔ فرض کرو زاویہ پ۱ م لا = عہ اور فرض کرو کہ زاویہ پ۱ م پ۲ = جف عہ۔ اگر پ۱ سے پ۲ تک چلنے کی مدت جف و ہو تو سمتی نیمقطر بھی زاویہ جف عہ اسی مدت میں بنائیگا۔ اور زاویئی رفتار

$$\text{ز} = \frac{\text{جف عہ}}{\text{جف و}}$$

متشابہ مثلثوں پ۱ م لا، پ۲ ک پ۲ میں زاویہ ک پ۱ پ۲ = پ۱ م لا = عہ

$$\text{اب جف عہ} = \frac{\text{پ}_1\text{ک}}{\text{م پ}_1} = \frac{\text{پ}_1\text{پ}_2 \times \text{جم عہ}}{\text{م پ}_1} = \frac{\text{پ}_1\text{پ}_2 \times \text{جم عہ} \times \text{جب عہ}}{\text{پ}_1\text{لا}}$$

$$\text{نیز پ}_1\text{پ}_2 = \text{ر} \times \text{جف و}$$

$$\therefore \text{جف عہ} = \frac{\text{ر} \times \text{جف و} \times \text{جم عہ} \times \text{جب عہ}}{\text{پ}_1\text{لا}}$$

$$\therefore \text{ز} = \frac{\text{جف عہ}}{\text{جف و}} = \frac{\text{ر} \times \text{جم عہ} \times \text{جب عہ}}{\text{پ}_1\text{لا}} \quad \ldots\ldots (1)$$

اِس جملے سے سمتی نیمقطر کی زاویئی رفتار نقطہ لا سے فاصلے کی رقموں میں معلوم ہو جاتی ہے۔ اگر پ۱ لا صفر ہو تو نقطہ لا میں سے گزرتا ہوگا اور عہ بھی صفر ہوگا۔ اِس وقت ز کے جملے کی شکل $\frac{0}{0}$ ہو جاتی ہے۔ اِس کی قیمت معلوم کرنے کے لئے فرض کرو کہ نقطہ لا کے بہت قریب لیا گیا ہے۔ اِس وقت جب عہ = $\frac{\text{پ}_1\text{لا}}{\text{م پ}_1}$ اور جم عہ = ۱۔ اِن قیمتوں کو درج کرنے سے

$$\text{ز}_{\text{با}} = \frac{\text{ر} \times \text{پ}_1\text{لا}}{\text{پ}_1\text{لا} \times \text{م پ}_1} = \frac{\text{ر}}{\text{م پ}_1}$$

$$= \frac{\text{ر}}{\text{م لا}} \quad \ldots\ldots (2)$$

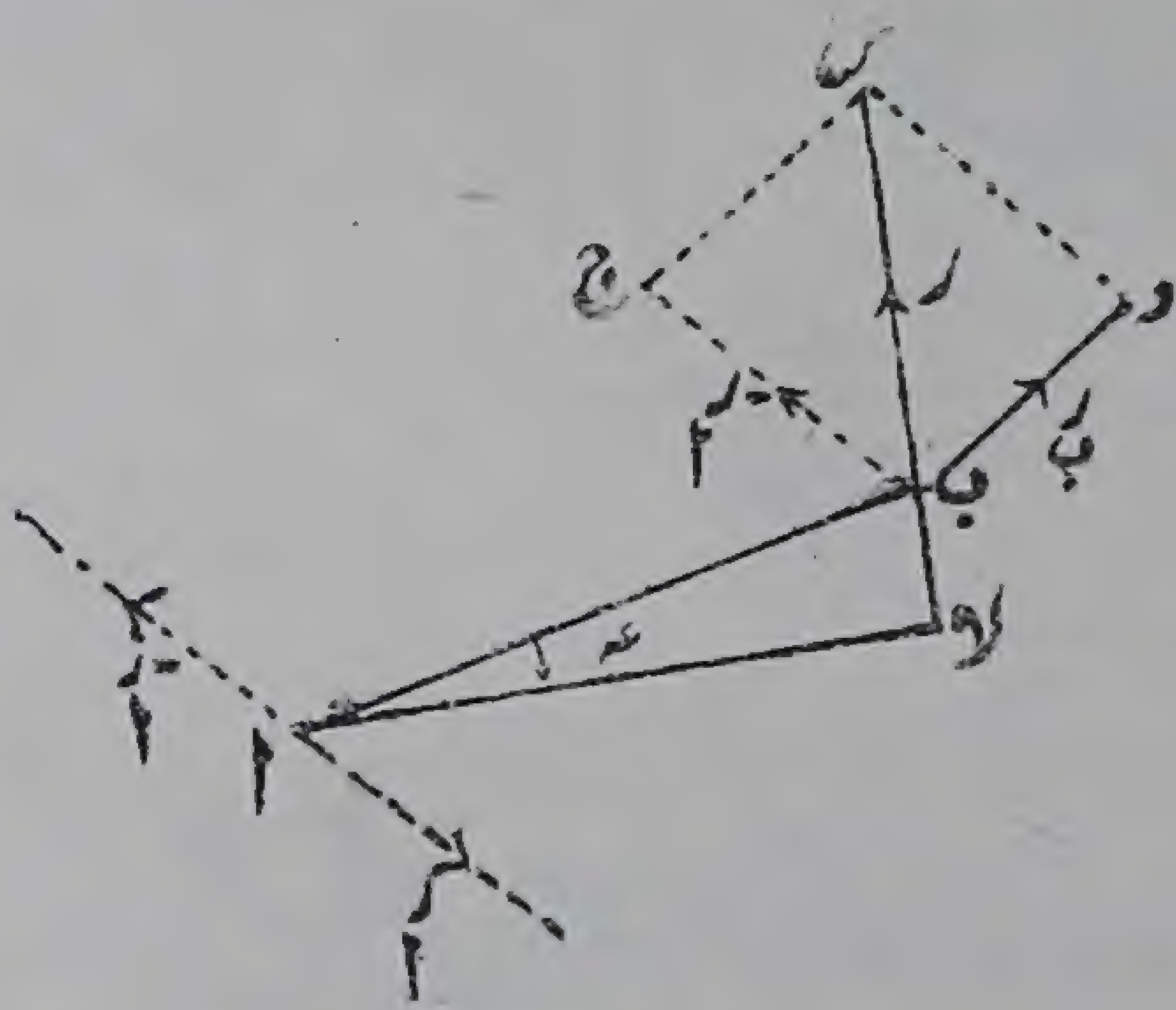
یہ ایک نتیجہ ہے جو مساوات (۱) صفحہ (۸۶) کے مطابق ہے۔

اضافی زاویئی رفتار ــــ شکل ۶۲ میں ایک نقطے ا میں کسی آن ایک رفتار ر ہے اور اُسی آن ایک دُوسرے نقطے ب میں ایک رفتار ر_ب ہے۔ ا میں ایک رفتار ـ ر_ا پیدا کر کے اِس کو روک دو اور یہی رفتار ـ ر_ا ب میں پیدا کر دو۔ متوازی الاضلاع ب د س ج کے ذریعہ سے ب کی حاصل رفتار دریافت کر لو۔ یہ ر ہوگی۔ اب بجائے دی ہوئی شرائطِ حرکت کے ذیل کی مساوی شرائط حاصل ہوگئیں:-

ایک نقطہ ا حالتِ سکون میں ہے اور دُوسرا نقطہ ب ایک خطِ مستقیم ب س میں یکساں رفتار ر سے حرکت کر رہا ہے اور کسی آن نقطہ ب پر پہنچ گیا ہے۔ ب س پر ا ل عمود کھینچو اور بشرطِ ضرورت ب س کو بڑھا لو۔ فرض کرو کہ زاویہ ب ا ل = ع تو مساوات (ا) صفحہ (۹۶) کی رُو سے

ا کی اضافت سے ب کی اضافی زاویئی رفتار = $\frac{ر \times جب ع \times جم ع}{ب ل}$

اِن رفتاروں کے حساب سے جو شکل ۶۲ میں دکھلائی گئی ہیں یہ اضافی زاویئی رفتار خلاف سمتِ ساعت ہے۔ اسی طرح ب کی اضافت سے ا کی اضافی زاویئی رفتار معلوم ہو سکتی ہے کہ ب میں ایک رفتار ـ ر_ب پیدا کر کے اِس کو روک دیا جائے۔ طالبِ علم کو چاہئے کہ اِس صورت کے لئے خود شکل بنائے۔



شکل ۶۲۔ اضافی زاویئی رفتار

اور اِس امر کی تصدیق کرے کہ ب کی اضافت سے ا کی رفتار

ا کی اضافت سے ب کی رفتار کے مساوی ہے۔ اور اُس کی محوری گردش کی جہت بھی وہی ہے۔

ایک محوری گردش کرنے والے جسم کے کسی نقطہ کی رفتار:۔

شکل ۶۳ میں ایک جسم، کاغذ کے مستوی کے علی القوائم س پر کے ایک محور کے گرد یکساں زاویئی رفتار ن سے گردش کرتا دکھلایا گیا ہے۔ کسی آن کسی نقطے ا یا ب کی رفتار کی سمت نصف قطر پر عمود ہے۔ فرض کرو کہ ا کی رفتار دی ہوئی ہے مثلاً $\text{ر}_{\text{ا}}$ تو ب کی رفتار $\text{ر}_{\text{ب}}$ حسب ذیل معلوم ہو سکتی ہے:۔

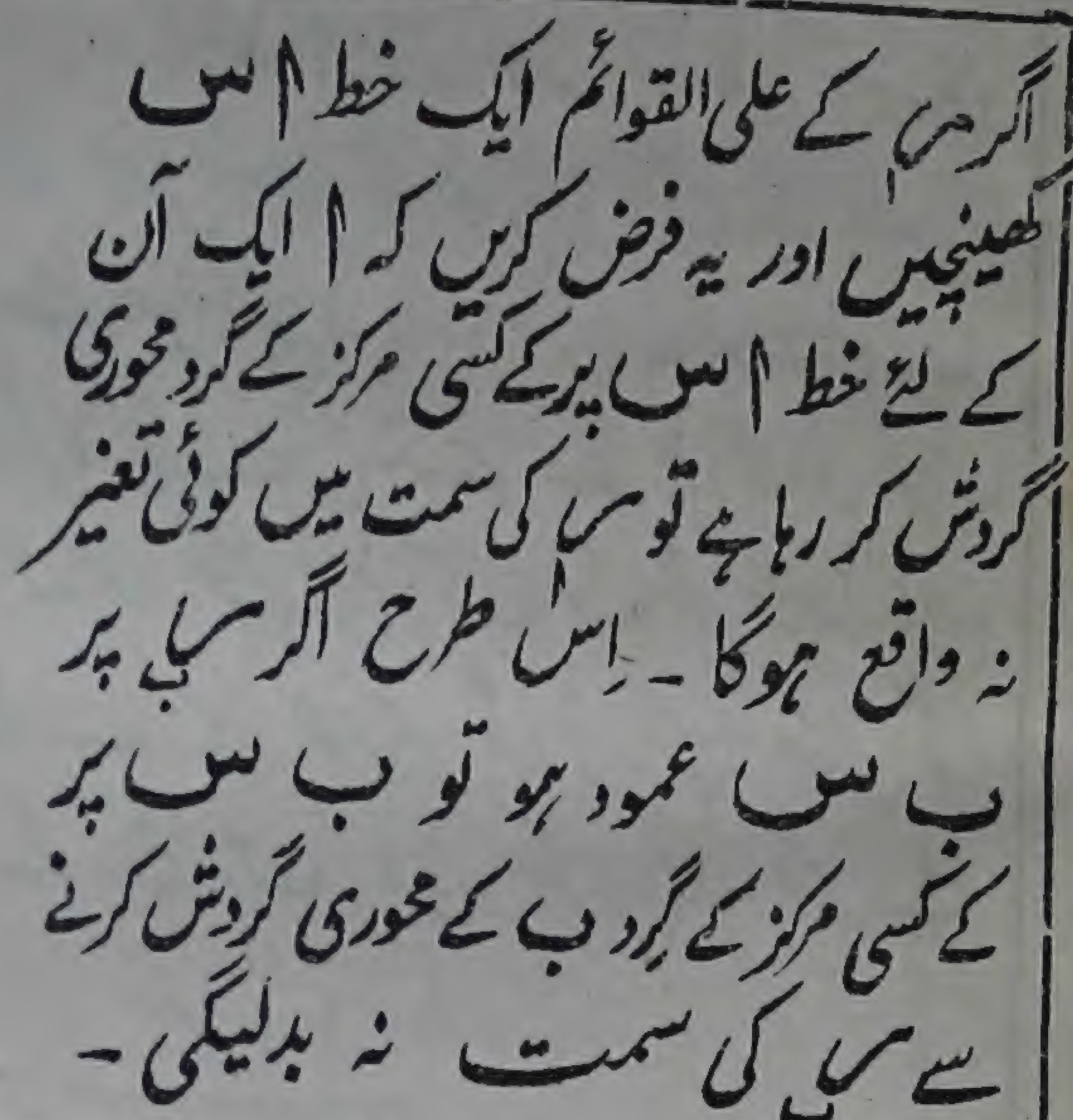
$$\text{ن} = \frac{\text{ر}_{\text{ا}}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ر}_{\text{ب}}}{\text{ب س}} \therefore \frac{\text{ر}_{\text{ا}}}{\text{ر}_{\text{ب}}} = \frac{\text{ا س}}{\text{ب س}}$$

یہ ایک ایسا نتیجہ ہے جس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی نقطہ کی رفتار، گردش کے محور سے اپنے فاصلے کے متناسب ہوتی ہے

شکل ۶۳ - محوری گردش کرنیوالے جسم کے نقطوں کی رفتاریں

محوری گردش کا آنی مرکز ـــ فرض کرو کہ ایک سلاخ ا ب (شکل ۶۴) اِس طرح حرکت کر رہی ہے کہ کسی معینہ آن میں ا کی رفتار $\text{ر}_{\text{ا}}$ اور ب کی رفتار $\text{ر}_{\text{ب}}$ نشان کی ہوئی سمتوں میں ہو۔

اگر را کے علی القوائم ایک خط ا س کھینچیں اور یہ فرض کریں کہ ا ایک آن کے لئے خط ا س پر کے کسی مرکز کے گرد محوری گردش کر رہا ہے تو را کی سمت میں کوئی تغیر نہ واقع ہوگا۔ اِس طرح اگر رب پر ب س عمود ہو تو ب س پر کے کسی مرکز کے گرد ب کے محوری گردش کرنے سے رب کی سمت نہ بدلیگی۔



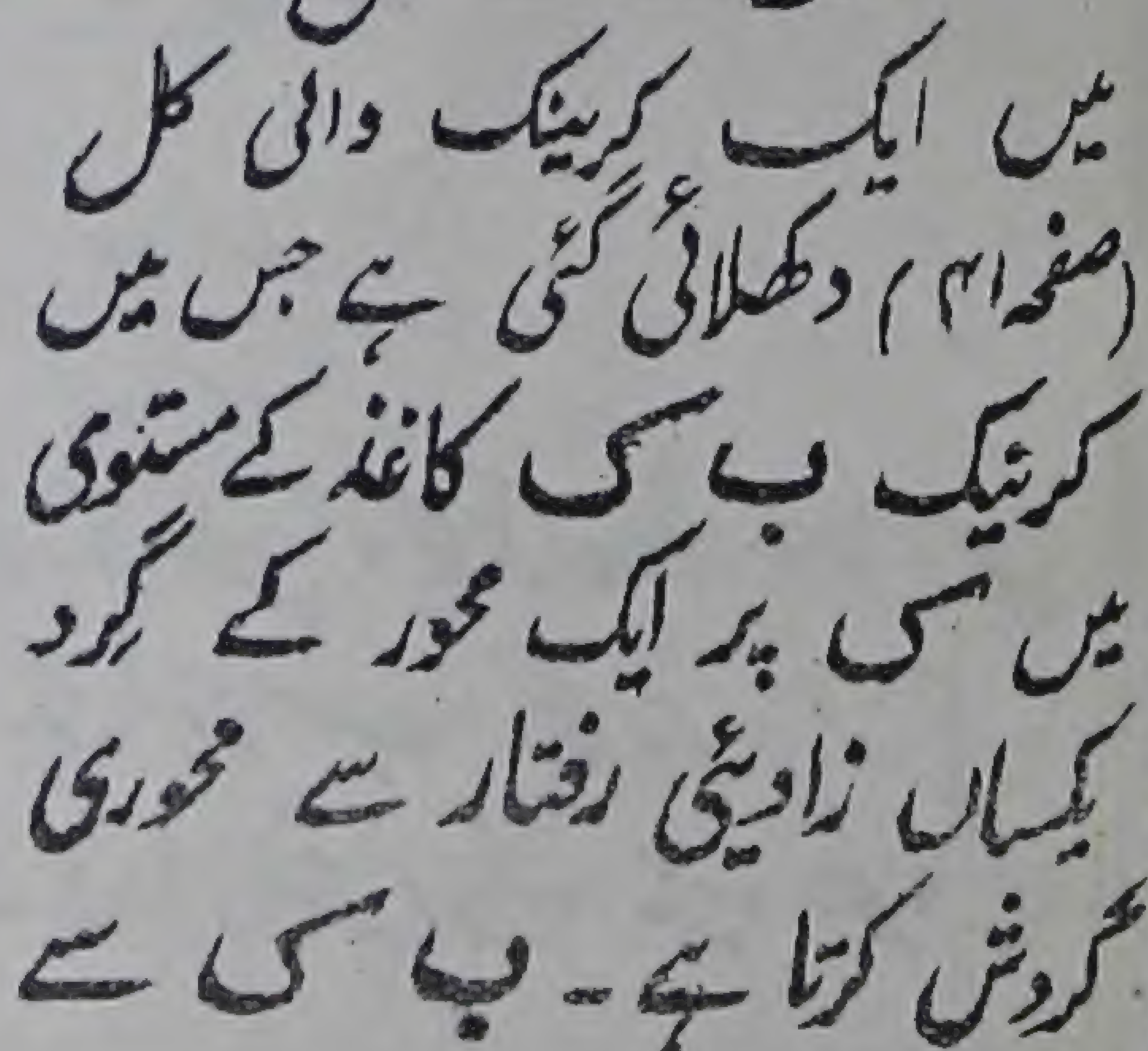
شکل ۶۴ - آنی مرکز

یہ دونوں عمود س پر ملتے ہیں۔ اور ہم یوں سمجھ سکتے ہیں کہ ا اور ب دونوں ایک آن کے لئے بغیر اپنی رفتاروں کی سمت بدلے ہوئے س کے گرد محوری گردش کر رہے ہیں۔ س **محوری گردش کا آنی مرکز** کہلاتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر سلاخ کے دو نقطے ایک آن کے لئے س کے گرد محوری گردش کر رہے ہیں تو اِس وقت سلاخ کا ہر نقطہ بھی س کے گرد محوری گردش کر رہا ہے۔

اگر را معلوم ہو تو صفحہ (۹۸) کے دیے ہوئے علاقہ کی مدد سے ہم رب کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں یعنی

$$\frac{\text{را}}{\text{رب}} = \frac{\text{س ا}}{\text{س ب}}$$

مثال ـــ شکل ۶۵ میں ایک کرینک والی کل (صفحہ ۱۴) دکھلائی گئی ہے جس میں کرینک ب ک کاغذ کے مستوی میں ک پر ایک محور کے گرد یکساں زاویئی رفتار سے محوری گردش کرتا ہے۔ ب ک سے



شکل ۶۵ - ا ب کا آنی مرکز

سلاخ ا ب، ب پر وصل ہے اور اس کا سرا ا خط ا ک میں حرکت کرنے پر مجبور ہے۔ کسی آن ب کی رفتار $ر_ب$ معلوم ہو تو آنی مرکز کے قاعدے کے استعمال سے ا کی رفتار بھی معلوم ہو سکتی ہے۔ ا ک پر ا س عمود کھینچو تو ا س کے کسی نقطہ کے گرد ایک آن کے لئے ا محوری گردش کرتا خیال کیا جا سکتا ہے۔ $ر_ب$ پر ب س عمود کھینچو یعنی ک ب کو بڑھا دو۔ تو ب خط ب س کے کسی نقطے کے گرد محوری گردش کرتا خیال کیا جا سکتا ہے۔ پس سلاخ ا ب کے لئے س آنی مرکز ہے۔ اس لئے

$$\frac{ر_ا}{ر_ب} = \frac{\text{س ا}}{\text{س ب}}$$

کل کی بعض وضعوں میں ا ک سے س ذرا دُور فاصلہ پر پڑیگا۔ جب ا ک سے ب ک ۹۰° پر ہو تو س لاتناہی پر ہوگا۔ تھوڑی سی ترمیم سے یہ مطلوبہ عمل اوسط وسعت کے نقشہ کشی کے کاغذ پر کیا جا سکتا ہے۔

ا ک سے ۹۰° پر ک سے گزرتا خط ن ک ص کھینچو۔ ا ب کو بڑھاؤ (بشرط ضرورت) کہ ن ک ص کو ز میں قطع کرے۔ ظاہر ہے کہ مثلث س ا ب اور ک ز ب متشابہ ہیں۔ پس

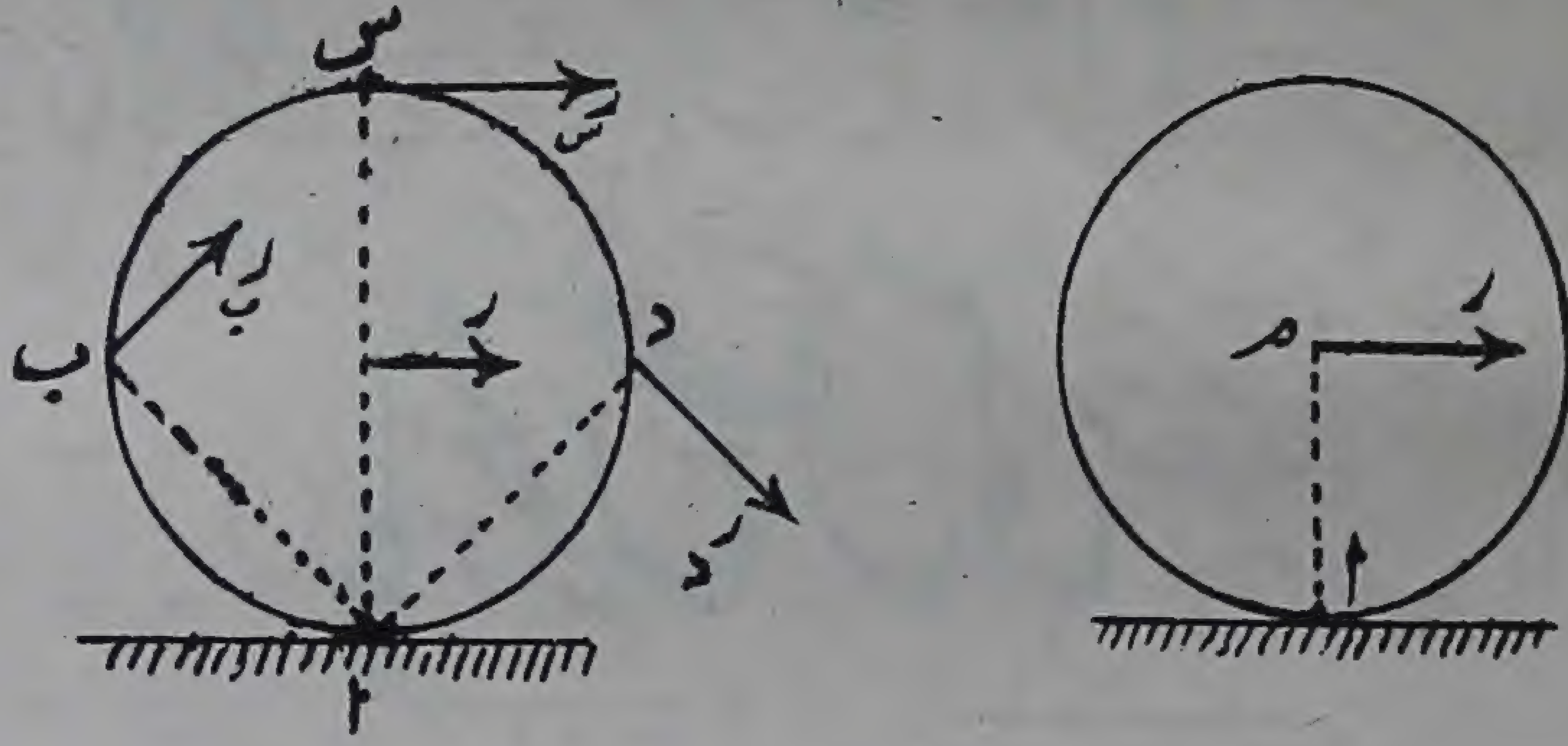
$$\frac{\text{س ا}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ک ز}}{\text{ک ب}}$$

$$\therefore \frac{ر_ا}{ر_ب} = \frac{\text{ک ز}}{\text{ک ب}} = \frac{1}{ط}\,\text{ک ز}$$

جہاں ط = سلاخ ب ک کا طول۔ چونکہ ط اور $ر_ب$ دونوں مستقل ہیں لہٰذا $ر_ا$ ک ز کے متناسب ہے۔

لڑھکتا پہیہ — شکل ۶۶ (ا) میں ایک پہیہ دکھایا گیا

ہے جو سڑک پر بغیر پھسلے لُڑھکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ پہیہ کے مرکز م کی رفتار
اُس گاڑی کی رفتار ر کے مساوی ہے جس سے پہیہ مُلحق ہے۔ مزید برآں
اگر پھسل نہ ہو تو پہیہ کی کناری میں نقطہ ا چونکہ زمین سے مَس کرتا



شکل ۶۶ (ا) لڑھکتے پہیئے کی زاویئی رفتار — شکل ۶۶ (ب) لڑھکتے پہیئے میں نقطوں کی رفتاریں

ہے اس لئے ایک آن کے لئے ساکن ہے اور اس لئے پہیہ کا آنی مرکز
ہے پس پہیہ کی زاویئی رفتار $\frac{\text{ر}}{\text{ام}}$ ہے۔ اور یہ نتیجہ اُس کے مطابق
ہے جو ایک دُوسرے طریقہ سے صفحہ (۹۰ اور ۹۱) پر حاصل کیا گیا تھا۔
ایک آن کے لئے پہیہ کا ہر نقطہ ا کے گرد محوری گردش کرتا
ہے۔ پس ہر نقطہ کی رفتار معلوم ہو سکتی ہے۔ چنانچہ س کی رفتار
(شکل ۶۶ ب) اس سے ۹۰° پر ہے اور ذیل کی مساوات سے
حاصل ہوتی ہے:-

$$\frac{\text{رس}}{\text{ر}} = \frac{\text{اس}}{\text{ام}} = ۲$$

$$\therefore \text{رس} = ۲\,\text{ر}$$

ب اور د کی رفتاریں [جو م سے گزرنے والے اُفقی خط
پر واقع ہیں] اب اور اد پر علی الترتیب عمود ہیں۔ اور ذیل کی
مساوات سے حاصل ہوتی ہیں:-

$$\frac{\text{ر}_{\text{ب}}}{\text{ر}} = \frac{\text{اب}}{\text{ام}} = \sqrt{۲}$$

$$\therefore \text{ر}_{\text{ب}} = \text{ر}\sqrt{۲}$$

اسی طرح $\text{ر}_{\text{د}} = \text{ر}\sqrt{۲}$

پانچویں فصل کی مشقیں

(۱) ایک پہیہ فی دقیقہ ۹۰ مرتبہ گردش کرتا ہے۔ تو نیمقطری فی ثانیہ میں اس کی زاویئی رفتار معلوم کرو۔

(۲) کسی گھڑی کی ثانیہ کی سوئی کی زاویئی رفتار نیمقطری فی ثانیہ میں کیا ہوتی ہے؟

(۳) اگر ایک پہیہ کی زاویئی رفتار ۳۰ نیمقطری فی ثانیہ ہو تو فی دقیقہ وہ کتنی گردشیں کریگا۔

(۴) ایک گھومتے پہیہ کی چال ۵۰ سے بدل کر ۴۹ نیمقطری فی ثانیہ رہ جاتی ہے۔ اِس تبدیلی کو فی دقیقہ گردشوں میں ظاہر کرو۔

(۵) ۸ فٹ قطر والے ایک پہیّہ کی کناری کے ایک نقطے کی خطی رفتار ۴۸ فُٹ فی ثانیہ ہے تو پہیہ کی زاویئی رفتار معلوم کرو۔

(۶) ایک پہیہ سکون سے آغاز کرتا ہے اور ۲۴ ثانیوں میں ۲۰۰ گردشیں فی دقیقہ کی چال حاصل کرلیتا ہے۔ تو زاویئی اسراع دریافت کرو۔

(۷) اگر ایک پہیہ کی زاویئی رفتار ۵ء۶ ثانیہ میں بدل کر ۵۰ سے ۴۸ نیمقطری فی ثانیہ رہ جائے تو اُس کا زاویئی اسراع کیا ہوگا؟

(۸) ۸ فُٹ قُطر والے ایک گھومتے پہیہ کی کناری میں ایک نقطہ کی رفتار مماس کی سمت میں ۸۰ فُٹ فی ثانیہ ہے۔ ۵ ثانیہ بعد اِسی نقطہ کی مماسی رفتار ۶۰ فٹ

فی ثانیہ ہے۔ پہیہ کا زاویئی اِسراع دریافت کرو۔

(۹) ایک پہیہ سکون سے ۲ء۰ نیمقطری فی ثانیہ فی ثانیہ کے زاویئی اِسراع سے آغاز کرتا ہے تو کتنی مدت میں اِس کی چال ۱۵۰ گروش فی ثانیہ ہو جائیگی؟ اور اِس مدت میں وہ کتنی گردشیں کریگا؟

(۱۰) اگر ایک پہیہ سکون سے آغاز کرکے ۶ء۰ نیمقطری فی ثانیہ فی ثانیہ کے زاویئی اِسراع کے ساتھ ۳۰ نیمقطری فی ثانیہ کی زاویئی رفتار حاصل کرلیتا ہے۔ تو بتلاؤ کہ پہیے نے کتنا زاویہ طے کیا؟

(۱۱) ایک پہیہ کی چال بدل کر ۱۴۰ سے ۱۵۰ گردش فی دقیقہ ہوجاتی ہے۔ اور اِس دَوران میں وہ ۴۰ گردشیں کرتا ہے۔ تو زاویئی اِسراع معلوم کرو۔

(۱۲) ۲۸ اِنچ قطر والے ایک بائیسکل کے پہیئے کی زاویئی رفتار کیا ہوگی جب کہ بائیسکل ۱۲ میل فی گھنٹہ کے حساب سے جا رہی ہو۔ ایک میل کی مسافت طے کرنے میں پہیہ کتنی گردشیں کریگا؟

(۱۳) ایک دُھرا ا ایک دُوسرے دُھرے ب کو چرخیوں اور پیٹی کی مدد سے چلاتا ہے۔ اگر ا پر کی چرخی ۲۴ اِنچ قطر کی ہو اور فی دقیقہ ۲۰۰ گردشیں کرتی ہو تو ب پر والی چرخی کا قطر کیا ہونا چاہیئے تاکہ وہ ۱۵۰ گردش فی دقیقہ کی چال حاصل کرسکے۔

(۱۴) ایک چھوٹی موٹر میں ایک چرخی ۲ اِنچ قُطر کی ہے۔ موٹر فی دقیقہ ۱۲۰۰ گردشیں کرتی ہے۔ ایک دُھرے کو جس پر ۱۲ اِنچ قُطر کی ایک چرخی ہے ایک پیٹی چلاتی ہے جو موٹر کی چرخی پر چڑھی ہے۔ اِس دھرے پر ۳ انچ قطر کی ایک دُوسری چرخی ہے جو ایک پیٹی سے ۱۰ اِنچ قُطر والی چرخی سے مُلحق ہے اور ایک تجرباتی نمونے کے دُھرے پر لگی ہوئی ہے۔ تو نمونے کے دھرے کی چال گردش فی ثانیہ میں دریافت کرو۔

(۱۵) کسی بائیسکل کا چلانے والا پہیہ ۲۸ اِنچ قُطر کا ہے۔ اور اِس میں ایک دندیلا پہیہ ہے جس میں ۱۸ دندانے ہیں۔ گردانہ (کرینک) کی دُھری پر زنجیری پہیے میں ۴۶ دندانے ہیں۔ تو بائیسکل کی گیرائی کتنی ہے۔ ایک میل کی

مسافت طے کرنے میں ہر کرینک کتنی گردشیں کریگا؟

(۱۶) ایک پہیہ ا جس میں ۲۰ دانت ہیں ایک دوسرے ۴۵ دانت والے پہیے ب کو چلاتا ہے۔ اگر ا فی دقیقہ ۱۱۰ گردشیں کرتا ہے تو ب کی گردشی چال معلوم کرو۔ دکھلاؤ کہ کس طرح ممکن ہے کہ ا اور ب کی چالیں وہی رہیں لیکن دونوں کی محوری گردش کی سمت ایک ہی ہو۔

(۱۷) کسی گھڑی کے کُوکنے میں کمانی دان کو ۳٫۵ مکمل گردشیں دی جاتی ہیں۔ اِس کی وجہ سے گھڑی ۲۸ گھنٹے تک چلتی رہتی ہے۔ تو بتلاؤ کہ جب گھڑی حسبِ معمول چلتی ہے تو کمانی دان اور دقیقہ کی سُوئی ہر دو کی زاویئی رفتاروں میں کیا نسبت ہے؟

(۱۸) کسی گھڑی کی دقیقہ کی سُوئی ساعت کی سُوئی سے پہیوں کے ایک سلسلہ سے ملی ہوئی ہے۔ دقیقہ والی سُوئی کے تکلے پر ایک پہیے ا میں ۱۲ دانت ہیں اور ۴۸ دانت والے ایک پہیے کو چلاتا ہے۔ جس تکلے پر یہ پہیہ ہے اُسی پر ایک دُوسرا پہیہ ۸ دانت والا ہے اور یہ پہیہ ن دانت والے ایک پہیے کو چلاتا ہے جو ساعت کی سُوئی کے تکلے پر نصب ہے۔ ن کی قیمت دریافت کرو۔

(۱۹) تشریح کرو کہ زاویئی رفتار کس طرح پیمائش کی جاتی ہے۔ ایک نقطہ پ یکساں رفتار ر سے ایک خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔ اِس خط پر ایک ثابت نقطہ م سے ایک خط م ن عمود گرایا جاتا ہے۔ تو م کے گرد پ کی زاویئی رفتار، فاصلہ م پ کی رقموں میں معلوم کرو۔ [جامعۂ لندن]

(۲۰) اگر ن نصف قطر والے دائرے پر دو ذرّے ایک ہی جہت اور ایک ہی چال د سے گھُومیں تو ثابت کرو کہ ہر ایک کی اضافی زاویئی رفتار دُوسرے کی اضافت سے $\frac{د}{ن}$ ہے۔ [جامعۂ لندن]

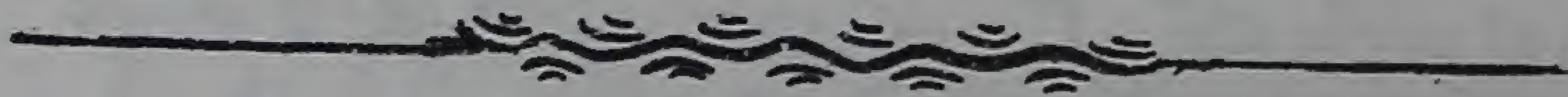
(۲۱) ایک سلاخ م ا ایک ثابت نقطہ م پر نصب ہے۔ اور ا پر ایک دُوسری سلاخ ا ب سے آزادانہ ملائی گئی ہے۔ کنارہ ب نقطہ م میں سے گزرنے والی ایک مستقیم نالی میں حرکت کرنے پر مجبور ہے۔ اگر سلاخ م ا چُول م کے گرد محوری حرکت یکساں زاویئی رفتار ں سے کرے تو ثابت کرو کہ کسی

آن نقطہ ب کی رفتار۔

ہ ا (جب تہ + جم تہ مس فہ) ن ر ہوگی

جہاں تہ اور فہ وہ زاویے ہیں جو ہ ر ب کسی آن ہ ر ا اور ا ب سے بناتا ہے۔ [جامعۂ لندن]

(۲۲) اگر ایک پہیہ یکساں رفتار ر سے اُفقی مستوی پر بغیر پھسل کے لڑھک رہا ہو تو اُس کے محیط پر کسی نقطہ کی رفتار دریافت کرو۔ ثابت کرو کہ پہیہ کا ہر نقطہ اِس طرح حرکت کر رہا ہے کہ گویا وہ اُس آن پہیہ اور زمین کے نقطۂ تماس کے گرد گردش کر رہا ہے۔



چھٹی فصل

جمود یا استمرار

نیوٹن کا پہلا کُلیۂ حرکت ـــــــ علمِ حرکت کی بنیاد تین اساسی کُلیات پر ہے جن کو نیوٹن نے منضبط کیا۔ پہلا کُلیہ حسبِ ذیل ہے:-

ہر جسم اپنی حالتِ سکون یا خطِ مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت کو برقرار رکھتا ہے تا آنکہ دوسری قوتیں اُس کو حالت بدلنے پر مجبور نہ کریں۔

کسی جسم کا اپنی حالتِ سکون یا مستقل مستقیم رفتار کو برقرار رکھنے کا میلان اصطلاح میں جمود یا استمرار کہلاتا ہے۔ پہلا کُلیہ تجربے کے نتائج کو ظاہر کرتا ہے۔ اگر ایک ریل گاڑی ہموار پٹڑی پر کھڑی ہو تو وہ اُس وقت تک حرکت نہ کریگی جب تک کہ انجن کی طرف سے اِس پر کھینچنے والی ایک قوت عمل نہ کرے۔ اگر ریل مستقل چال سے چل رہی ہو تو انجن اِتنی قوت سے عمل کرتا ہے جو رگڑ کی مزاحمتوں پر غالب آنے کے لئے کافی ہو۔ اور اگر چال بڑھ رہی ہو تو اِس سے بہت زیادہ قوت سے اُس کو عمل کرنا پڑتا ہے۔ اگر بھاپ بند کر دی جائے تو رگڑ کی مزاحمتیں چال کو بتدریج کم کر دیتی ہیں۔ اور اگر بریک (ضابط) بھی استعمال کئے جائیں تو رگڑ کی مزید قوتیں ریل کو فوراً سکون میں لے آتی ہیں۔ پس رفتار میں اضافے کے لئے رفتار ہی کی سمت اور جہت میں ایک قوت استعمال کرنا پڑیگی اور اگر رفتار کو گھٹانا مقصود ہے تو قوت مخالف جہت میں استعمال کرنا پڑیگی۔

ٹرام گاڑی کی چھت پر کھڑا ہوا شخص جمود کے اثرات اپنے جسم پر مشاہدہ کر سکتا ہے۔ اگر ٹرام چلانے والا بریک (ضابطہ) دفعتہً لگا دے تو وہ شخص آگے گر پڑیگا۔ اگر وہ تیزی سے چلانے لگے تو مسافر گویا پیچھے رہ جائیگا۔ اگر گاڑی کے راستے میں موڑ ہو تو گاڑی تو مُڑ جائیگی لیکن مسافر کا جسم مستقیماً حرکت کرنے کا متقاضی ہوگا اور اس لئے موڑ کے بیرونی رُخ کی طرف جُھک جائیگا۔

کسی جسم کو کسی منحنی راستے پر چلانے کے لئے اُس راستے سے عمودی سمت میں ایک قوت استعمال کرنا پڑتی ہے۔

اب ہم چند مسائل بیان کرتے ہیں جو نیوٹن کے دُوسرے کُلیے کی طرف رہنمائی کرتے ہیں۔

قوت، کمیت اور اِسراع میں علاقہ:-

ایک ہی جگہ پر تمام جسم ایک ہی اِسراع سے گرتے ہیں۔ اِس بیان کی تصدیق تجربے سے ہو سکتی ہے۔ ایک ہی بلندی سے اگر دو پتھر ایک ساتھ پھینکے جائیں تو وہ زمین پر ایک ہی آن میں پہنچینگے۔ اگر پتھر کے بجائے ایک کاغذ کا پُرزہ لیا جائے تو اِس کو زیادہ وقت درکار ہوگا۔ اِس کا سبب ہوا کی مزاحمت ہے۔ لیکن اگر کاغذ مروڑ کر گولی بنا لیا جائے تو یہ اثر دُور ہو سکتا ہے اور اِس وقت کاغذ اور پتھر دونوں ساتھ گرینگے۔

چونکہ دو جسموں کے وزن اُن کی کمیتوں کے متناسب ہیں اور چونکہ دونوں ایک ہی اِسراع سے آزادانہ گرتے ہیں اِس لئے معلوم ہوا کہ اگر متعدد جسموں میں مساوی اِسراع پیدا کرنا مقصود ہے تو قوتوں کو کمیتوں کے متناسب ہونا چاہیئے۔

تجربہ خانہ میں ایک تجربہ (صفحہ ۱۱۵) کیا جا سکتا ہے جس سے ایک

دُوسرے کلیہ کی توضیح ہوتی ہے یعنی کسی دی ہوئی کمیت کے جسم پر جو قوت استعمال کی جاسکتی ہے وہ مطلوبہ اسراع کے متناسب ہے۔

اِن دونوں بیانوں کے ملانے سے عام کُلیہ حاصل ہوتا ہے:-

قوت جو درکار ہے وہ کمیت اور اسراع دونوں کے متناسب ہے اور اِس لئے کمیت اور اِسراع کے حاصل ضرب سے اِس کا اندازہ ہوتا ہے۔ اِسراع کی سمت اور جہت وُہی ہوتی ہے جو عاملہ قوت کی

فرض کرو ق = وہ قوت جس سے کوئی بیرونی موثر جسم پر اثر کرے۔

ک = جسم کی کمیت

ع = اسراع

تو ق = ک ع

قوت کی مطلق اِکائیاں:- قوت کی مناسب مطلق اِکائیاں (صفحہ ۹) نتیجۂ بالا سے اخذ کی جاسکتی ہیں۔کسی مقررہ نظام میں ک کو اِکائی کمیت مانو اور ع کو اِکائی اِسراع فرض کرو۔ تو ق اِکائی ہو جاتا ہے اور اِس نظام میں ہم اِس کو قوت کی مطلق اِکائی تسلیم کرسکتے ہیں۔ صفحہ (۹) پر س، گ، ث اور قوت کی انگریزی مطلق اِکائیاں بیان کی جاچکی ہیں۔ لیکن یہاں کسی قدر ترمیم شدہ صورت میں دوبارہ پیش کی جاتی ہیں:-

اگر ایک ڈائن (Dyne) کی قوت ایک گرام کمیت پر عمل کرے تو اِس میں ۱سمر فی ثانیہ فی ثانیہ کا اِسراع پیدا کردیگی۔

اگر ایک پونڈل (Poundal) کی قوت ایک پونڈ کی کمیت پر عمل کرے تو اِس میں ایک فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اِسراع پیدا کردیگی۔

قوت کے ابعاد استبدال کے ذریعہ مساوات بالا سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

چنانچہ ق = ک ع = ک $\frac{\text{ط}}{\text{و}^2}$

قوت کی مطلق اور تجاذبی اِکائیوں میں علاقہ

——— چونکہ ایک جسم جس کی کمیت ک ہو اپنے وزن و کے زیرِ اثر آزادانہ گرتا ہے اور اِس میں اِسراع ج پیدا ہو جاتا ہے، اِس لئے معلوم ہُوا کہ قوت کی مطلق اِکائیوں میں کسی جسم کا وزن

و = ک ج ہے۔

ایک پونڈ وزن کی قوت اگر آزادانہ گرتی ہوئی ایک پونڈ کی کمیت پر عمل کرے تو اِس میں ج فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اِسراع پیدا کر دیتی ہے۔ ج پونڈل[1] کی قوت بھی وُہی اِسراع پیدا کرتی۔ پس ایک پونڈ کا وزن ج پونڈل کے مساوی ہے۔ اِسی طرح ایک گرام کا وزن ج ڈائن کے مساوی ہے۔ اِن بیانات کی تعبیر کرتے وقت یہ لحاظ رکھنا چاہیئے کہ جو نظام استعمال کیا جائیگا اُسی لحاظ سے ج فٹ یا سنتی میتر فی ثانیہ فی ثانیہ میں ہوگا۔

قوت کی تجاذبی اِکائیوں کو مطلق اکائیوں میں تحویل کرنے کے لئے ج سے ضرب دو۔

نیوٹن کا دُوسرا کُلیۂ حرکت: ——— فرض کرو کہ ک کمیت کا ایک جسم ابتدائی وضع ا (شکل ۶۷) میں ساکن ہے۔ اگر ایک قوت ق عمل کرے تو ایک مستقل اِسراع ع پیدا ہوگا۔ فرض کرو کہ یہ کیفیت و ثانیہ تک قائم رہتی ہے۔

ق ← ا ق ← ب ← ر

شکل ۶۷۔ قوت اوراس سے پیدا شدہ معیارِ حرکت کا علاقہ

اور جسم اِس مدت میں ا سے ب تک چل نکلتا ہے، ب تک پہنچنے پر رفتار ر ہے تو

ق = ک ع

نیز ر = ع و [صفحہ ۵۰]

یا ع = ر/و

∴ ق = ک ر/و .... (۱)

[1] Poundal

کسی جسم کے معیارِ حرکت سے مُراد حرکت کی مقدار ہے اور اِس کا اندازہ کمیت اور رفتار کے حاصل ضرب سے ہوتا ہے۔ چنانچہ شکل ۲۶ میں ۱ پر جسم کا معیارِ حرکت صفر ہے (جہاں رفتار صفر ہے) اور ب پر اِس کی قیمت ک ر ہے۔ مدت و ثانیہ میں حاصل کردہ معیارِ حرکت ک ر ہے۔ پس فی ثانیہ پیدا شدہ معیارِ حرکت $\frac{ک\,ر}{و}$ ہے۔ پس ہم کہہ سکتے ہیں کہ **قوتِ عاملہ عدداً معیارِ حرکت کی تبدیلی کی شرح کے مساوی ہے یا فی ثانیہ پیدا شدہ معیارِ حرکت کے مساوی ہے۔**

پیدا شدہ معیارِ حرکت، اِسراع اور قوتِ عاملہ سب کی سمت اور جہت ایک ہوتی ہے۔ یہ تمام نتائج **نیوٹن کے دُوسرے کُلیہ** میں جمع کر دئے گئے ہیں:۔

معیارِ حرکت کی تبدیلی کی شرح قوتِ عاملہ کے تناسب ہوتی ہے اور قوت ہی کی سمت میں عمل کرتی ہے۔

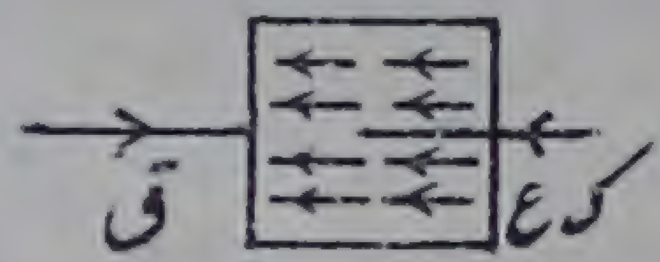
معیارِ حرکت کے ابعاد $\frac{ک\,ط}{و}$ ہیں۔

نیوٹن کا تیسرا کُلیۂ حرکت —— **ہر عمل کے لئے ہمیشہ ایک مساوی اور مخالف ردِّ عمل ہوتا ہے یا دو جسموں کے باہمی تعامل سمتاً ہمیشہ مساوی اور مخالف ہوتے ہیں۔**

یہ کُلیہ تجربے کا نتیجہ ہے۔ چنانچہ چند مثالیں پیش کی جاتی ہیں۔ اگر کوئی شخص ہاتھ میں بوجھ لئے ہوئے ہو تو اُس کے ہاتھ پر ایک نیچے کی طرف قوت (یعنی بوجھ کا وزن) عمل کریگی اور ہاتھ بھی مساوی قوت سے بوجھ پر عمل کریگا۔ اِسی طرح اگر کوئی شخص رسی کھینچ رہا ہو تو اُس کو محسوس ہوتا ہے کہ رسی بھی مساوی اور مخالف قوت سے اُسے کھینچ رہی ہے۔ کسی جسم پر ایک ہی خطِ مستقیم میں عمل کرنے والی دو مساوی اور مخالف قوتیں ہمیشہ توازن میں رہتی ہیں۔ ایسی صورت میں جسم اگر

ساکن ہے تو ساکن رہیگا اور اگر متحرک ہے تو اِس کی حرکت میں کوئی تبدیلی نہ پیدا ہوگی۔

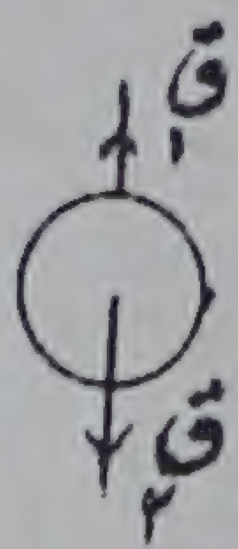
اگر جسم پر کوئی خارجی عامل کسی قوت سے عمل کرے مثلاً جسم میں تاگا باندھ کر کھینچنا یا جسم سے ملی ہوئی سلاخ کے ذریعہ سے دھکا دینا، تو وہ قوت کلیۂ ق = ک ع کے مطابق اِسراع پیدا کریگی۔ اِس صورت میں جسم بوجہ اپنے جمود کے ایک ردِّ عمل اِس قوت کے مساوی اور مخالف کرتا ہے جس سے کہ خارجی عامل اِس پر عمل کرتا ہے۔ شکل ۶۸ میں ق جسم پر عمل کرنے والی خارجی قوت ہے۔ جسم کا ہر ذرّہ اپنے جمود کی وجہ سے اِس مساوی مخالف ردِّ عمل میں حصہ لیتا ہے اور کُل یا حاصل ردِّ عمل ک ع سے ظاہر ہوتا ہے۔



شکل ۶۸۔ جمود کی وجہ سے مزاحمت

فی الحقیقت مساوات ق = ک ع سے مُراد دو مقابل کی قوتوں کی تساوی ہے۔ جن میں سے ایک ق ہے جو جسم پر عمل کرنے والی "حاصل بیرونی قوت" ہے اور دوسری ک ع جو جسم کے جمود کی وجہ سے پیدا شدہ اندرونی قوت ہے۔

اگر ایک جسم پر دو مقابل کی بیرونی قوتیں $ق_۱$ اور $ق_۲$ (شکل ۶۹) عمل کریں۔ اور وہ دونوں غیر مساوی لیکن ایک ہی خطِ مستقیم میں ہوں، تو ظاہر ہے کہ صرف ایک بیرونی قوت ($ق_۲ - ق_۱$) حرکت کی تبدیلی میں وُہی اثر پیدا کریگی۔ ($ق_۲ - ق_۱$) کو ہم بیرونی حاصلِ قوت کہہ سکتے ہیں۔ اور مساوات ق = ک ع میں اِسی کو ق کی قیمت قرار دینا چاہیئے۔



شکل ۶۹

مثال ۱ :— اگر رگڑ کی مزاحمتیں نظرانداز کر دی جائیں تو ۱۵۰ ٹن کمیت والی ایک ریل میں ۱٫۵ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اسراع پیدا کرنے کے لئے ایک انجن کو اُسے کس قوت سے کھینچنا چاہیئے؟

ق = ک ع

= ۱۵۰ × ۲۲۴۰ × ۱٫۵

= ۵۰۴۰۰۰ پاؤنڈل

= ۵۰۴۰۰۰ / ۳۲٫۲

= ۱۵۶۵۰ پاؤنڈ کا وزن

مثال ۲ :— اگر حرکت کے خلاف رگڑ کی مزاحمتیں موجود ہوں اور ان کی مقدار ۱۰ پونڈ وزن فی ٹن وزن ریل ہو تو گزشتہ سوال کا کیا جواب ہوگا؟

کُل رگڑ کی مزاحمت = ق۱ = ۱۰ × ۱۵۰

= ۱۵۰۰ پونڈ وزن

فرض کرو کہ جس قوت سے انجن کھینچتا ہے وہ = ق۲ پونڈ وزن

تو اسراع پیدا کرنے والی حاصلِ قوت = (ق۲ - ق۱) پونڈ وزن

پس ق = ق۲ - ق۱

= ک ع / ج

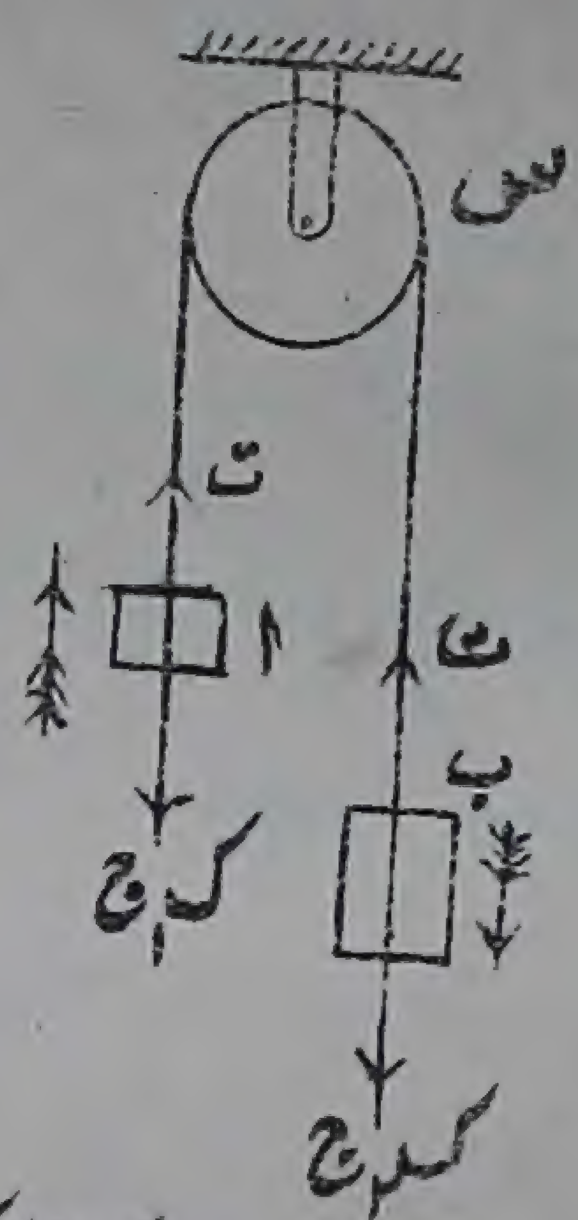
= ۱۵۰ × ۲۲۴۰ × ۱٫۵ ÷ ۳۲٫۲

= ۱۵۶۵۰

∴ ق۲ = ۱۵۶۵۰ + ۱۵۰۰

= ۱۷۱۵۰ پونڈ وزن

مثال ۳ :— دو جسم ا اور ب (شکل ۷) ایک چرخی س پر گزرنے والے ہلکے ڈورے کے دونوں سروں میں بندھے ہوئے ہیں۔ ڈورا اس قدر باریک مانا جا سکتا ہے کہ اس کا وزن نظرانداز کر دیا جائے اور



شکل ۳۰۔ جاذبہ کے عمل کے تحت حرکت

اِس قدر ملائم بھی ہو سکتا ہے کہ جو قوتیں اِس کو چرخی کے گرد موڑتی ہیں طرح دی جا سکتی ہیں۔ یہ بھی فرض کر لیا گیا ہے کہ چرخی اِس قدر ہلکی ہے کہ اِس کا وزن قابلِ طرح ہے۔ نیز یہ کہ اِس کے سہاروں میں رگڑ کی مزاحمت کچھ نہیں ہے۔ اِن مفروضات کے تحت ڈورے کے تمام حصّوں پر قوتِ کشش مساوی ہوگی، چرخی کا صرف یہ کام ہے کہ ڈورے کی سمت کو بدل دیتی ہے۔ ا اور ب کی کمیتوں کو ک۱ اور ک۲ مانو اور پھر حرکت پر نظر کرو۔

ا کو لو:۔ دو بیرونی قوتیں اِس پر عمل کر رہی ہیں۔ یعنی وزن ک۱ ج اور اُوپر کی جانب ڈورے کی کشش ت۔ اگر یہ قوتیں مساوی ہیں تو کوئی حرکت نہ پیدا ہوگی یا اگر حرکت پیدا ہوئی تو رفتار یکساں ہوگی۔ فرض کرو کہ ت بہ نسبت ک۱ ج کے بڑا ہے تو اُوپر کی جانب ایک اِسراع ع پیدا ہوگا اور ہم پھر

$$\text{ت} - \text{ک}_1\text{ج} = \text{ک}_1\text{ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

لکھ سکتے ہیں۔

اب ب پر غور کرو:۔ اِس جسم پر نیچے کی جانب ایک قوت ک۲ ج، اور اُوپر کی جانب ایک قوت ت عمل کر رہا ہے۔ اور آلے کی ترتیب سے ظاہر ہے کہ اِس میں نیچے کی جانب ایک اِسراع ع ہے۔ پس ک۲ ج بڑا ہے ت سے اور ہم

$$\text{ک}_2\text{ج} - \text{ت} = \text{ک}_2\text{ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

لکھ سکتے ہیں۔

ع اور ت کو دریافت کرنے کے لئے (۱) اور (۲) کو حل کرنے سے جمع کرنے پر

$$\text{ک}_2\text{ج} - \text{ک}_1\text{ج} = (\text{ک}_1 + \text{ک}_2)\,\text{ع}$$

یا

$$\text{ع} = \left(\frac{\text{ک}_2 - \text{ک}_1}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}\right)\text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

حاصل ہوتا ہے۔

(۱) کو (۲) سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{ت} - \text{ک}_{۱}\,\text{ج}}{\text{ک}_{۲}\,\text{ج} - \text{ت}} = \frac{\text{ک}_{۱}}{\text{ک}_{۲}}$$

$$\therefore\ \text{ک}_{۲}\,\text{ت} - \text{ک}_{۱}\,\text{ک}_{۲}\,\text{ج} = \text{ک}_{۱}\,\text{ک}_{۲}\,\text{ج} - \text{ک}_{۱}\,\text{ت}$$

یا
$$\text{ت}\,(\text{ک}_{۱} + \text{ک}_{۲}) = ۲\,\text{ک}_{۱}\,\text{ک}_{۲}\,\text{ج}$$

$$\text{ت} = \left(\frac{۲\,\text{ک}_{۱}\,\text{ک}_{۲}}{\text{ک}_{۱} + \text{ک}_{۲}}\right)\text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر $\text{ک}_{۱}$ اور $\text{ک}_{۲}$ مساوی ہوں تو دونوں جسم یا تو ساکن ہونگے یا اُن میں مستقل رفتار ہوگی اور ڈورے پر کھینچ دونوں میں سے ایک جسم کے وزن کے برابر ہوگی۔

اِس مسئلہ کو دُوسرے نقطۂ نظر سے بھی دیکھ سکتے ہیں: دو جسم ا اور ب ہیں جن کی مجموعی کمیت $(\text{ک}_{۱} + \text{ک}_{۲})$ ہے (شکل ۳۰) عمل کرنے والی قوت ایک حاصلِ قوت ہے جو اِن کے وزنوں کے فرق کے مساوی ہے یعنی $(\text{ک}_{۲}\,\text{ج} - \text{ک}_{۱}\,\text{ج})$ پس

$$\text{ک}_{۲}\,\text{ج} - \text{ک}_{۱}\,\text{ج} = (\text{ک}_{۱} + \text{ک}_{۲})\,\text{ع}$$

یا
$$\text{ع} = \frac{\text{ک}_{۲} - \text{ک}_{۱}}{\text{ک}_{۱} + \text{ک}_{۲}}\,\text{ج}$$

یہ وُہی نتیجہ ہے جو اُوپر (۳) میں حاصل ہُوا۔

اَیٹ وُڈ کی مشین[1] ——— اِس مشین میں مذکورۂ بالا مثال ۳ میں جو کیفیت بیان کی گئی ہے اُس کی تصدیق کرنے کی اِس طرح کوشش کی گئی ہے کہ ایک بہت ہلکا ریشمی ڈورا اور ایک ہلکی ایلومینیئم کی چرخی استعمال کی جاتی ہے جو گول سہاروں پر قائم ہوتی ہے یا ایسے سہاروں پر جن میں سے حتی الامکان رگڑ ساقط کر دی جا سکے۔

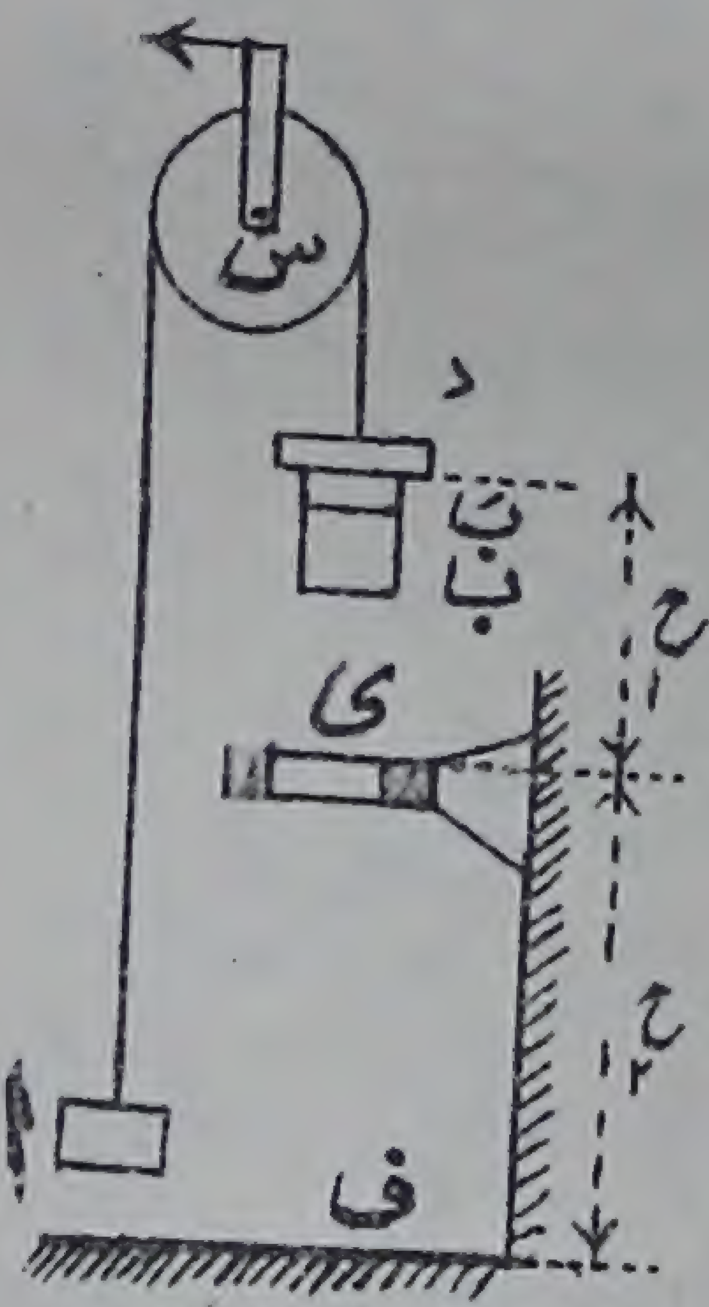
[1] Attwood

مشین کا طریقۂ استعمال حسبِ ذیل ہے:-

تجربہ ۱۲ ـــــ ایٹ وُڈ کی مشین کا استعمال-

مساوی بوجھ ا اور ب ڈورے کے کناروں سے لٹکائے جاتے ہیں (شکل ۱۷)۔ ایک چھوٹا زائد بوجھ بَ شامل کر دیا جاتا ہے اور کچھ اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ وہ پورا پورا رگڑ پر غالب آجائے اور اگر ذرا سا دھکا دیا جائے تو ب میں نیچے کی جانب یکساں رفتار پیدا کر دے۔ کوئی زائد وزن د اگر ب پر رکھا جائیگا تو جملہ متحرک حصوں میں اسراع پیدا کر دیگا۔ اگر بوجھوں کی کمیتوں کو ہم بغرض امتیاز لاحقہ لگا کر ظاہر کریں تو چرخی اور ڈورے کی کمیتوں کو نظر انداز کرنے سے معلوم ہوگا کہ

$$\text{کل متحرک کمیت} = ک_{ا} + ک_{ب} + ک_{بَ} + ک_{د}$$
$$= ۲ک_{ا} + ک_{بَ} + ک_{د}$$



شکل ۱۷۔ ایٹ وُڈ کی مشین

$$\text{اسراع پیدا کرنے والی قوت} = ک_{د}\,ج$$
$$\therefore\quad ک_{د}\,ج = (۲ک_{ا} + ک_{بَ} + ک_{د})\,ع$$
$$\text{یا}\quad ع = \frac{ک_{د}\,ج}{۲ک_{ا} + ک_{بَ} + ک_{د}} \quad ------ (۱)$$

اِس نتیجہ کی تصدیق کے لئے ہم ذیل کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں :-
ایک ثابت حلقہ ی پر رکھا جاتا ہے۔ اِس کا اندرونی قطر اِتنا ہے کہ اِس میں سے ب اور بَ بآسانی گزر سکتے ہیں لیکن د نہیں گزر سکتا۔ ی پر پہنچ کر د رُک جاتا ہے اور بقیہ متحرک حِصّے یکساں رفتار سے چلتے رہتے ہیں یہاں تک کہ ب ثابت تختہ ف پر پہنچ کر حرکت کو روک دیتا ہے۔ ح۱ اور ح۲ کی پیمائش کرو۔ بغیر دھکا دئے حرکت کو شروع ہونے دو اور ساتھ ہی ایک چل رُکنی گھڑی کو بھی چلا دو [ثانیہ کی کسروں والی چل رُکنی گھڑی کارآمد ہوتی ہے] جب د رُک جائے تو وقت کو دیکھ لو اور نیز جب ف تک ب پہنچ جائے تو اُس وقت کو بھی دیکھ لو۔ کئی مرتبہ ایسا کرو اور اوسط مدتیں معلوم کر لو۔ فرض کرو کہ آغاز سے اُس آن تک کی اوسط مدت جب کہ د رُک جاتا ہے و۱ ہے۔ اور فرض کرو کہ جس اوسط مدت میں ی سے ف تک ب پہنچتا ہے وہ و۲ ہے۔ نیز فرض کرو کہ ی اور ف کے درمیان ب کی یکساں رفتار ر ہے۔ اور د کے رُکنے سے قبل تک فرض کرو کہ اسراع ع ہے۔

$$\text{تو}\quad ح_{۲} = ر\,و_{۲} \quad \text{یا}\quad ر = \frac{ح_{۲}}{و_{۲}}$$

$$\text{نیز}\quad ر = ع\,و_{۱} \qquad [\text{صفحہ ۵۰}]$$

$$\therefore\quad ع = \frac{ر}{و_{۱}} = \frac{ح_{۲}}{و_{۱}\,و_{۲}} \quad ----- \quad (۲)$$

$$\text{یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ}\quad ح_{۱} = \frac{۱}{۲}\,ع\,و_{۱}^{۲}$$

$$\therefore\quad ع = \frac{۲ ح_{۱}}{و_{۱}^{۲}} \quad ------ \quad (۳)$$

اِسراع کے شمار کرنے کے لئے ہر دو جملے (۲) یا (۳) استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ اور اِن سے حاصل کردہ نتائج کو معقول حد تک (۱) کے حسابات کے مطابق ہونا چاہیئے۔ واضح رہے کہ اِس آلے سے کُلیہ ق = ک ع کی صداقت کی تجرباتی توضیح ہوتی ہے۔

دھکے والی قوتیں :-

مساوات

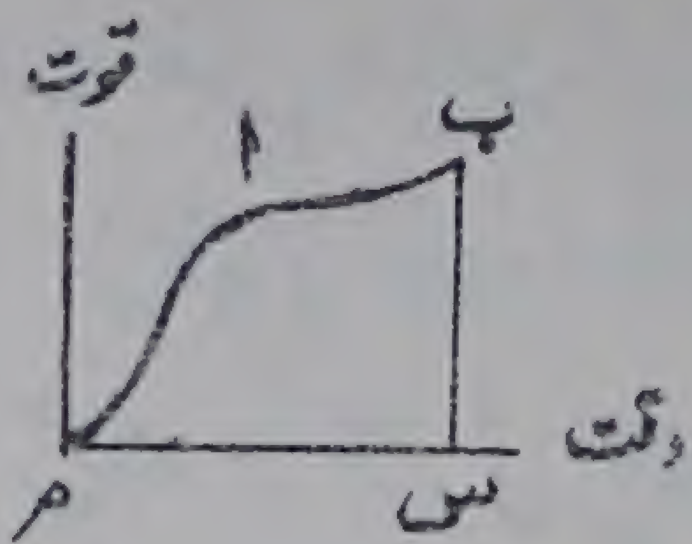
$$ق = \frac{ک\,ر}{و} \quad (\text{صفحہ ۱۰۹}) \quad --- \quad (۱)$$

پر دوبارہ غور کرنے سے واضح ہوگا کہ اس میں جو اُصول مضمر ہے اُس پر مقدارِ مدّت کا کوئی اثر نہ پیدا ہوگا۔ اگر یہ مدّت بہت ہی قلیل ہو تو دھکے کا مفہوم حاصل ہوتا ہے۔ یعنی ایسی قوت جو بہت ہی قلیل عرصے تک عمل کرے۔ عموماً دورانِ عمل میں کسی آن ایسی قوت کی مقدار کا بتلانا ممکن نہیں ہے۔ اور مساوات (۱) سے ق کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے وہ قوت کی اوسط قیمت ہے۔ جس کو ہم ضرب کی اوسط قوت کہہ سکتے ہیں۔

مساوات کو یوں لکھ سکتے ہیں :-

ق و = ک ر - - - - - - - (۲)

اس صورت میں یہ اشارہ ہے کہ اگر قوت اور وقت کی قیمتوں کو ترسیم کریں بشرطیکہ یہ معلوم ہوں تو ایسی شکل حاصل ہوگی جیسا کہ شکل ۲۷ میں م ا ب س ہے۔



شکل ۲۷ ۔ وقت کے لحاظ سے قوت کا اوسط

اس شکل کی اوسط بلندی سے ق کی اوسط قیمت حاصل ہوتی ہے۔ شکل میں وقت کو قاعدہ مان کر ق کی قیمت حاصل کرنے کی وجہ سے قوت ق کو بعض اوقات قوت کا وقتی اوسط کہتے ہیں۔ اس کے وہی معنی ہیں جو ضرب کی اوسط قوت کے معنی ہیں۔

چونکہ اوسط قوت ق شکل ۲۷ میں اوسط بلندی سے تعبیر کی گئی ہے اور چونکہ قاعدہ م س وقت و کو ظاہر کرتا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلا کہ شکل کا رقبہ ق و کو تعبیر کرتا ہے۔ ق و کو قوت کا دھکا کہتے ہیں اور وہ جسم کے معیارِ حرکت کی مجموعی تبدیلی کے مساوی ہے۔

مثال :- ایک گولی کی کمیت ۵۰ گرام ہے اور اُس کی رفتار ۴۰۰ میٹر

فی ثانیہ ہے اگر وہ ۰٫۰۱ ثانیہ میں ساکن کردی جائے تو دھکا اور ضرب کی اوسط قوت معلوم کرو۔

دھکا = ک ر = ۵۰ × ۴۰۰ × ۱۰۰

= ۲ × ۱۰^۶ گرام، سم/ثانیہ اکائیاں

ضرب کی اوسط قوت = ک ر / و = ۲ × ۱۰^۶ / ۰٫۰۱ = ۲ × ۱۰^۸ ڈائین

= ۲٫۰۴ × ۱۰^۵ گرام وزن

چھٹی فصل کی مشقیں

(۱) ۱۵ پونڈ کی کمیت میں ۴۵ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اسراع پیدا کرنے کے لئے کتنی قوت درکار ہے۔

(۲) ۹۵۴۰ ڈائین کی ایک قوت ۲٫۵ کلوگرام کی ایک کمیت پر عمل کرتی ہے۔ تو اسراع دریافت کرو۔

(۳) (۱) ڈائین کو پونڈل میں اور (۲) پونڈل کو ڈائین میں تحویل کرنے کے لئے اجزاء ضربی دریافت کرو۔

(۴) ایک سائیکل اور اُس کے سوار دونوں کی کمیت ۱۹۰ پونڈ ہے۔ جب ایک ہموار سطح پر ۱۰ میل فی گھنٹہ کے حساب سے چلنے لگتا ہے تو سائیکل سوار پیر چلانا بند کر دیتا ہے۔ اُس وقت وہ ۲۰۰ گز کے فاصلے پر جاکر ساکن ہو جاتا ہے۔ حرکت کے خلاف اوسط مزاحمت دریافت کرو۔

(۵) ایک ریل گاڑی کی کمیت ۲۰۰ ٹن ہے۔ سکون سے آغاز کرنے پر پہلے دقیقہ میں ۴۰۰ گز کا فاصلہ طے ہو جاتا ہے۔ اسراع کو یکساں فرض کریں تو ریل کے جمود پر غالب آنے کے لئے کتنی قوت درکار ہوگی۔

(۶) ایک مرفع کا کھٹولہ کمیت میں ۱۰۰۰ پونڈ ہے۔ جس رسی میں کھٹولہ بندھا ہوا ہے اُس پر کھینچ کیا ہوگی جب کہ

(۱) مرفع یکساں چال سے اُتر رہا ہو۔

(ب) مرفع ۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اسراع سے اُتر رہا ہو۔

(ج) مرفع اسی اِسراع سے چڑھ رہا ہو۔

(۷) ایک ریل گاڑی کی کمیت ۲۵۰ ٹن ہے۔ اگر ۱ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اِسراع پیدا کرنے کے لئے انجن ۱۰ ٹن وزن کی قوت سے کھینچے تو علاوہ جمود بقیہ اسباب کی وجہ سے کتنی مزاحمت ہوگی ؟

(۸) ایک آدمی جس کا وزن ۱۶۰ پونڈ ہے، ایک آزادانہ لٹکی ہوئی رسی پر ۴ فٹ فی ثانیہ کی یکساں چال سے اُترتا ہے۔ اِس کی وجہ سے رسی پر کسی قدر کھینچ عمل کرتی ہے۔ اور اگر کسی آن وہ اپنی کھینچ کو نصف کر دے تو کیا کیفیت پیدا ہوگی؟

(۹) ۱۰ پونڈ کی ایک کمیت میز پر رکھی ہے، اور میز کے کنارے لگی ہوئی ایک چکنی چرخی پر سے گزرنے والے ڈورے سے بندھی ہے۔ جس کے دُوسرے سرے پر ۱ پونڈ کی ایک کمیت آزادانہ لٹک رہی ہے۔ اگر میز چکنی ہو تو ایک ثانیہ میں دونوں کمیتوں میں کتنی رفتار پیدا ہو جائیگی۔ اور ڈورے کا تناؤ بھی معلوم کرو۔ اگر تجربہ کرتے وقت کمیتیں یکساں رفتار سے متحرک نظر آئیں تو تم کیا انتاج کروگے۔ اور اِس صورت میں ڈورے کا تناؤ کیا ہوگا ؟ (جامعۂ لنڈن)

(۱۰) ایک چرخی پر ایک باریک ڈورا ہے جس کے ایک سرے پر ۰٫۵ کلو گرام کی کمیت ہے اور دوسرے سرے پر ۰٫۹ کلو گرام کی۔ رگڑ کو نظرانداز کر دو اور اِسراع اور ڈورے کا تناؤ دریافت کرو۔

(۱۱) ایٹ وُڈ کی ایک مشین میں ڈورے کے ہر سرے پر ۲ پونڈ کی ایک کمیت ہے۔ اِس کے بعد یہ معلوم ہوتا ہے کہ ۰٫۲ پونڈ کی ایک زائد کمیت کا ایک طرف بڑھا دینا مستقل حرکت پیدا کرنے کے لئے کافی ہے۔ ۰٫۴ پونڈ کی ایک دُوسری کمیت اِسی طرف اور بڑھا دی جاتی ہے تو ۴ فٹ کی بلندی سے ہبوط از سکون کے اختتام پر ۴٫۷۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار پیدا ہو جاتی ہے۔ کیا یہ نتیجہ نظریہ کے مطابق ہے ؟ اِس واقعی اِسراع کا مقابلہ نظریہ سے حاصل شدہ اِسراع سے کرو۔ [ج = ۳۲٫۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ]

(۱۲) ایک ریل گاڑی جو یکساں اِسراع سے حرکت کر رہی ہے تین نقطوں ا، ب، اور س سے علی الترتیب ۲۰، ۳۰ اور ۴۵ میل فی گھنٹہ کے

حساب سے گزرتی ہے۔ فاصلہ اب ۲ میل ہے، فاصلہ ب س دریافت کرو۔ اگر س پر بھاپ بند کر دی جائے اور ضابطے لگا دئے جائیں تو س سے ایک میل کے فاصلے پر ریل کو ساکن کرنے کے لئے ریل کی فی ٹن کمیت پر پونڈ وزن میں مزاحمت کیا ہوگی۔ (جامعۂ لندن)

(۱۳) ایک ریل کے ڈبے کا معیارِ حرکت دریافت کرو اگر اس کی کمیت ۱۲ ٹن ہو اور وہ ۱۵ میل فی گھنٹہ کے حساب سے رواں ہو۔ اگر ۴ ثانیوں میں رفتار بدل کر ۱۲ میل فی گھنٹہ رہ جائے تو حرکت کے خلاف اوسط مزاحمت کیا ہے؟

(۱۴) اگر ایک گولا ۱۲۰۰ پونڈ کمیت کا ہو اور ۱۵۰۰ فٹ فی ثانیہ سے رواں ہو تو اُس کا دھکا دریافت کرو۔ اگر گولا ۰.۰۱ ثانیہ میں ساکن کر دیا جائے تو ضرب کی اوسط قوت دریافت کرو۔

(۱۵) اصطلاحات اسراع، قوت، اور معیارِ حرکت کی تعریف کرو اور اِن کا ہر ایک سے صحیح صحیح علاقہ بتلاؤ۔

ذیل کی عبارتوں میں کیا غلطی ہے!۔

(ا) قوت جس سے ایک جسم حرکت کرتا ہے۔

(ب) ۱۰ فٹ فی ثانیہ کا اسراع؟ (جامعۂ ادِنبرا)

(۱۶) ایک چکنی میز پر ۲ پونڈ کی ایک کمیت ایک ڈورے سے بندھی ہے جو میز کے کنارے لگی ہوئی ایک ہلکی بے رگڑ چرخی پر سے گزرتا ہے جس کے دوسرے سرے پر ایک اونس کی کمیت آویزاں ہے۔ تو

(ا) سکون سے ۱ ثانیہ تک حرکت کرتے رہنے کے بعد کمیتوں کی رفتاریں کیا ہوں گی اور

(ب) اِس وقت اس نظام کا معیارِ حرکت کیا ہوگا؟ (جامعۂ لندن)

(۱۷) قوت کا دھکا اور دھکے والی قوت کی تعریف کرو۔ اِس ضرب کی سمت اور مقدار کیا ہوگی جو ۵ $\frac{1}{2}$ اونس وزنی اور ۳۰ فٹ فی ثانیہ کے حساب سے رواں کرکٹ کے ایک گیند کی سمتِ حرکت بقدر ایک زاویۂ قائمہ کے بدل دے اور اُس کی رفتار کو دوگنا کر دے۔

بتلاؤ کہ تمہارا جواب کن اکائیوں میں ہوگا۔ (جامعۂ لنڈن)

(۱۸) ۱۰ اونس کی کمیت کا ایک ذرہ ا ایک چکنی میز پر رکھا ہے اور ایک ڈھیلے ڈورے کے ذریعہ سے، جو میز کے ایک سوراخ میں سے گزرتا ہے، ۶ اونس کمیت والے ایک دوسرے ذرے ب سے بندھا ہوا ہے جو میز کے سوراخ کے عین نیچے زمین پر پڑا ہوا ہے۔ ا میز پر ۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ جب ڈورا تن جائے تو دھکے والا تناؤ کیا ہوگا اور فوراً ہی بعد ذروں کی مشترک رفتار کیا ہوگی۔ نیز وہ بلندی معلوم کرو جہاں تک ب پہنچیگا۔ جامعۂ لنڈن

(۱۹) اضافی رفتار سے کیا مراد ہے۔ ۸ اونس کی کمیت کا ایک گیند انتصاباً ۱۴۴ فٹ گرنے کے بعد ایک شخص کے ہاتھوں میں جا پڑتا ہے جو موٹر کار میں بیٹھا ۳۰ میل فی گھنٹہ کے حساب سے اُفقاً جا رہا ہے۔ تو انتصابی خط سے کس سمت پر وہ گیند اُس کو حرکت کرتا دکھائی دیگا اور گو پہنچنے کے وقت گیند پر دھکے کی مقدار کیا ہوگی۔ (جامعۂ لنڈن)

(۲۰) $2\frac{1}{2}$ فٹ اُونچی ایک چکنی میز پر $\frac{1}{4}$ اور $\frac{3}{4}$، اونس کی دو کمیتیں رکھی ہوئی ہیں جو ۵ فٹ لمبے اور ناقابل امتداد ڈورے سے بندھی ہیں۔ ڈورے کو سیدھا اور میز کے کنارے کے علی القوائم کر کے چھوٹی کمیت کے کنارے تک آہستہ سے گھسیٹی جاتی ہے اور پھر چھوڑ دی جاتی ہے۔ بتلاؤ کہ

(ا) پہلی کمیت کے فرش تک پہنچنے میں کتنی مدت لگیگی اور

(ب) دوسری کمیت کے میز کے کنارے تک پہنچنے میں کتنا عرصہ درکار ہوگا۔ (جامعۂ لنڈن)

(۲۱) نیوٹن[ل] کے کلیاتِ حرکت بیان کرو اور دکھلاؤ کہ پہلے کلیہ سے کیونکر قوت کی تعریف حاصل ہوتی ہے اور دوسرے سے اس کی تخمین۔

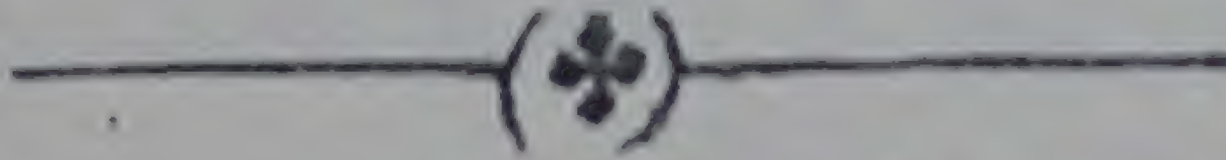
۱۵ میل فی گھنٹہ چلنے والی ایک موٹر کار پر اگر ضابط لگائے جائیں تو ۱۰ گز پر جا کے ٹھیر جاتی ہے تو ثابت کرو کہ جب ضابط لگا دئے جاتے ہیں تو موٹر کی

ل Newton

حرکت میں مجموعی مزاحمت موٹر کے وزن کا تقریباً ایک چوتھائی ہے۔ (جامعہ لندن)

(۲۲) ایک ذرہ ایک چکنی سطح مائل کے سب سے زیادہ ڈھال والے خط پر پھینکا جاتا ہے۔ اور یہ دیکھا جاتا ہے کہ نقطۂ رمی سے اُوپر کی جانب گزرنے کے چار ثانیہ بعد وہ ذرہ نیچے کی جانب نقطہ رمی سے ۱۸ فُٹ کے فاصلے سے گزرتا ہے۔ علاوہ ازیں مقامِ رمی سے ۳۲ فُٹ کے فاصلے سے ایک نقطہ میں سے اُس کے مرور کے درمیان ۳ ثانیوں کا وقفہ ہوتا ہے۔ تو رفتار رمی اور مستوی کا ڈھلان معلوم کرو۔

جامعۂ لندن



ساتویں فصل

ایک نقطہ پر عمل کرنے والی سکونی قوتیں

قوت کی تشخیص:۔ قوت کی تشخیص کرتے وقت حسبِ ذیل تفصیلات بیان کرنا چاہیئے:۔

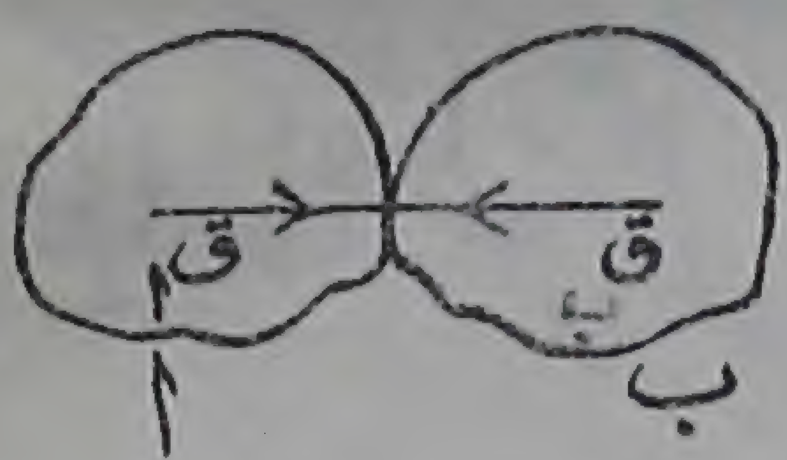
(ا) وہ نقطہ جہاں کہ قوت عمل کرتی ہے۔
(ب) خطِ سمت جس میں قوت عمل کرتی ہے۔
(ج) خطِ سمت پر جہت۔
(د) قوت کی مقدار۔

قوت ایک سمتی مقدار ہے۔ اِس کی تصدیق اِس امر سے ہوتی ہے کہ قوت کی پیمائش میں کمیت اور اِسراع دونوں شامل ہیں۔ کمیت درجیاتی مقدار ہے اور اِسراع سمتی مقدار ہے، پس قوت بھی سمتی مقدار ہوئی۔ اِس سے معلوم ہوا کہ اگر ایک ہی مستوی میں ایک نقطہ پر دو یا دو سے زیادہ قوتیں عمل کر رہی ہوں تو اُن کو ترکیب دے کر ایک حاصل قوت معلوم کر سکتے ہیں یعنی وہ قوت جس کا اثر وُہی ہے جو سب قوتوں کا۔ تیسری فصل میں سمتی جمع کے جو قاعدے بیان کئے گئے ہیں وہ یہاں استعمال کئے جا سکتے ہیں۔

"ایک نقطہ پر عمل کرنے والی قوت" کہنے ہی میں سہولت ہے لیکن اِس کے معنی بالکل لفظی نہ لینا چاہیئے۔ کوئی شئے بھی اِتنی سخت نہیں ہے کہ اگر اِس پر ایک ریاضیاتی نقطہ پر ایک چھوٹی سی قوت عمل کرے

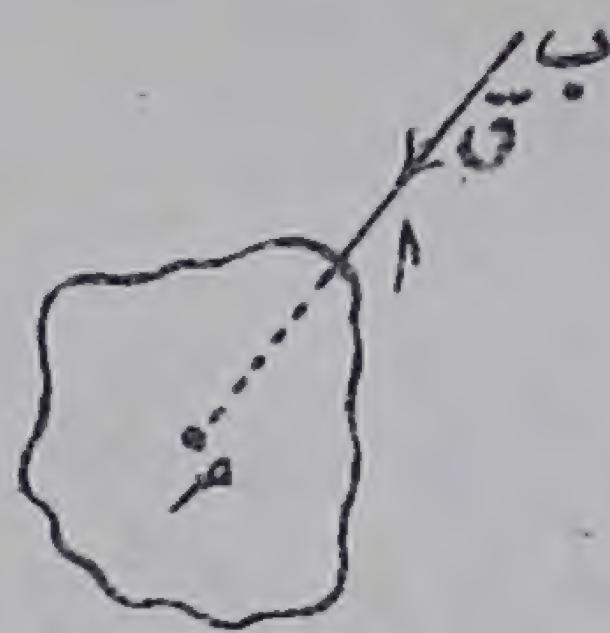
تو اس میں اُتر نہ جائے۔ جو کچھ مطلب ہے وہ یہ کہ قوت کو ہم نقطۂ زیرِ بحث پر مجتمع خیال کر سکتے ہیں جس کی وجہ سے جسم کی مجموعی حیثیت پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ مزید برآں کسی نقطہ پر عمل کرنے والی قوت کا ذکر کرتے وقت یہ نہ بھول جانا چاہیئے کہ نفسِ قوت کا وجود اُس مادہ کے وجود کو مستلزم ہے جس پر وہ عمل کرے۔

شکل ۷۳ میں ایک جسم ا کا عمل دُوسرے جسم ب پر ق ہے ساتھ ہی اس کے ا پر بھی ب کا مساوی ردِّ عمل ق ہے۔



شکل ۷۳۔ عمل اور ردِّ عمل

خطِ عمل پر قوت کا انتقال:۔ شکل ۷۴ میں ایک



شکل ۷۴۔ قوت کا انتقال



شکل ۷۵۔ ایک جسم پر تین عامل قوتیں

ڈھیل ق ایک جسم کے نقطہ ا پر عمل کرتی ہے جو خط ب ا میں واقع ہے۔ اگر ق جسم کے اندر اور خط ب ا کی سیدھ میں کسی اور نقطہ م پر عمل کرے تو حرکت میں تبدیلیاں پیدا کرنے یا حالتِ سکون کو برقرار رکھنے میں پ کے اثر میں کوئی تغیر نہ ہوگا۔ لیکن جسم کے ذرّوں کے باہمی عمل میں البتہ کچھ تبدیلیاں ہو جائینگی۔ یہ ظاہر ہے کہ

ق خواہ ا پر عمل کرے یا ھ پر دونوں حالتوں میں یہ تبدیلیاں ایک ہی ہونگی۔

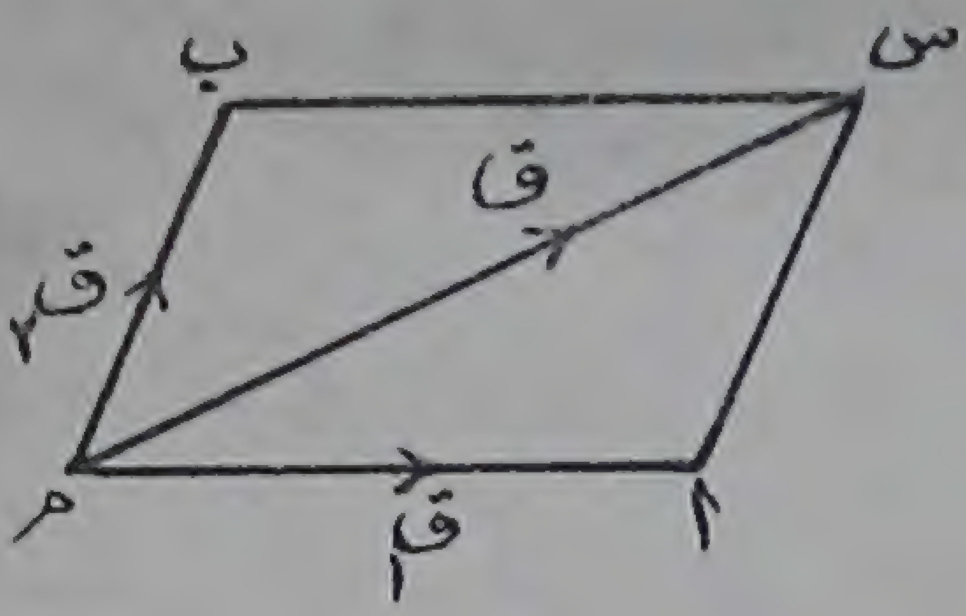
بہ حیثیت مجموعی جسم کی حالتِ سکون یا حرکت کا ذکر کرتے وقت ذرّوں کے باہمی عمل کو نظرانداز کر سکتے ہیں۔ مثلاً ایک جسم ا پر تین دوسرے جسم ب، س، د، ہر سہ نقطے بَ، سَ، دَ پر علی الترتیب قوت قِ، قٗ اور قٖ سے عمل کرتے ہیں۔ [شکل ۷۵]

تینوں قوتیں ھ پر متقاطع ہیں اور کاغذ کے مستوی میں ہیں۔ قوتوں کے اِن اثرات کو جن سے جسم ا کے ذرّوں کے مابین عمل پیدا ہوتا ہے، نظرانداز کردیں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر دئے ہوئے نقطوں بَ، سَ، دَ کی بجائے تینوں قوتیں ھ پر عمل کریں تو بہ حیثیتِ مجموعی جسم پر جو اثر ہوگا اُس میں تبدیلی نہ پیدا ہوگی۔ اِس دعوے کے بیان کرنے میں یہ تسلیم کرلیا گیا ہے کہ جسم اُستوار ہے۔ یعنی اِس کے ذرّات آپس میں اِس طرح ایک دوسرے سے ملتصق تسلیم کرلئے گئے ہیں کہ اِن کی اضافی وضعوں میں تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔ ورنہ لازم آئیگا کہ بہ حیثیتِ مجموعی جسم کی حرکت کے علاوہ ذرّاتِ جسم میں اِضافی حرکت ہو۔ یہاں یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ ایسی اضافی حرکت نہیں پیدا ہوتی۔

زور:۔ اصطلاح میں زور سے مُراد وہ باہمی عمل ہیں جو دو جسموں کے درمیان، یا ایک ہی جسم کے دو حصّوں کے مابین وقوع پذیر ہوتے ہیں جب کہ اُن پر قوتوں کا ایک نظام عمل کر رہا ہو۔ اِس اصطلاح میں قوت کے دونوں پہلو شامل ہوتے ہیں اور اِس لئے اِس میں جہت نہیں ہوتی۔ پس یہ لازم ہو جاتا ہے کہ ہم اِس عمل کو، عملاً یداہی زور کہیں اگر دو جسم یا ایک ہی جسم کے حصّے علیحدہ ہونے پر مائل ہوں یا پچکاؤ کا زور کہیں اگر جسم دبائے جائیں اور جُزّیی زور کہیں اگر جسم ایک دوسرے پر پھسلنے کو ہوں۔ زوروں کی تفصیلی بحث بارھویں فصل میں آئیگی۔

قوتوں کا متوازی الاضلاع اور مثلث :-

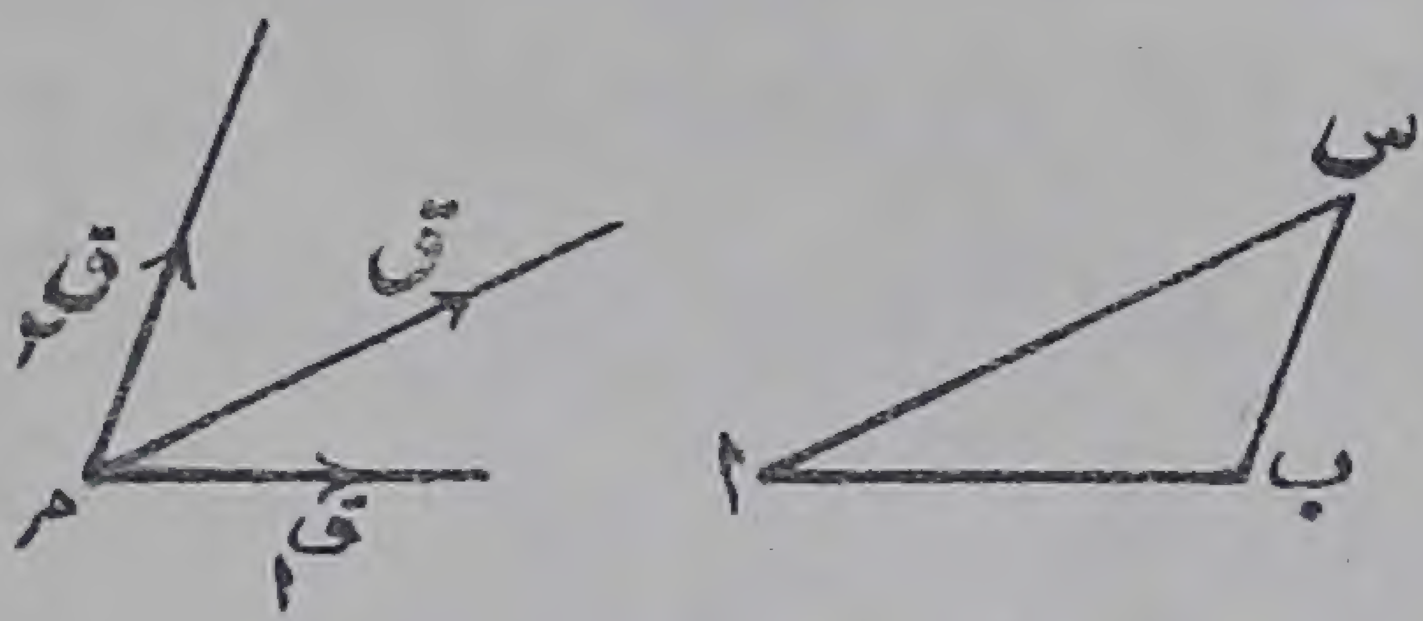
قوتوں کا متوازی الاضلاع بھی ویسا ہی عمل ہے جیسا کہ صفحہ ۶۴ پر رفتاروں کے متوازی الاضلاع کے تحت میں بیان کیا گیا ہے۔ دو ایسی قوتوں ق۱، ق۲ کو خیال کرو جو م پر عمل کرتی ہوں اور دونوں کاغذ کے مستوی میں ہوں (شکل ۷۶)۔



شکل ۷۶ - قوتوں کا متوازی الاضلاع

حاصل دریافت کرنے کے لئے کوئی مناسب پیمانہ تجویز کر لو اور ق۱ اور ق۲ کی قدر ظاہر کرنے کے لئے علی الترتیب م ا اور م ب بناؤ۔ متوازی الاضلاع م ا س ب کو مکمل کرو۔ وتر م س حاصل قوت ق کو ظاہر کریگا۔ اِس عمل کو کام میں لاتے وقت یہ لحاظ رکھنا چاہیئے کہ ق۱ اور ق۲ دونوں اِس طرح ترتیب دئے ہوں کہ یا تو دونوں م کی جانب عمل کریں۔ یا دونوں م سے دُور ہوں - یاد ہوگا کہ (صفحہ ۶۴) رفتاروں کے متوازی الاضلاع میں بھی یہی امر مدنظر رکھا گیا تھا۔

قوتوں کا مثلث بھی کام میں لایا جا سکتا ہے اور وہ بھی رفتاروں کے مثلث (صفحہ ۶۴) کی طرح ہے۔ ق۱ اور ق۲ نقطۂ عمل م دئے ہوں (شکل ۷۷) تو حاصل دریافت کرنے کے واسطے ق۱ کو ظاہر کرنے کے لئے ا ب کھینچو اور ق۲ کو ظاہر کرنے کے لئے ب س، تو حاصل ا س

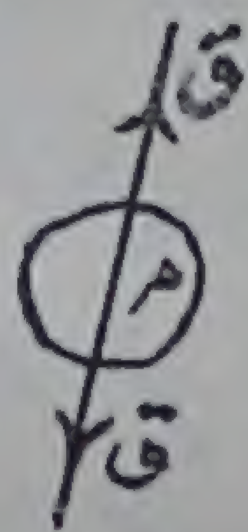


شکل ۷۷ - قوتوں کا مثلث

سے ظاہر ہوگا۔ واضح ہو کہ قوت ق کا خطِ عمل اس نہیں ہے [جو کاغذ پر ہر کہیں ہو سکتا ہے] بلکہ وہ ھ پر عمل کرتی ہے اور شکل ۷۷ میں اِسی لئے اس کے متوازی ایک خط سے ظاہر کی گئی ہے۔

ایک ہی خطِ مستقیم میں عمل کرنے والی قوتیں :-

ایک جسم حالتِ توازن میں ہوگا اگر اِس پر عمل کرنے والی قوتیں ایک دوسری کو تھام لیں یعنی حالتِ سکون یا حرکت میں تبدیلی پیدا نہ کریں ۔ چنانچہ اگر دو مساوی اور مخالف قوتیں ق، ق (شکل ۷۸) ایک جسم کے نقطہ ھ پر عمل کریں اور دونوں ایک ہی خطِ مستقیم میں ہوں تو وہ ایک دوسری کو تھام لینگی اور جسم توازن میں ہوگا۔

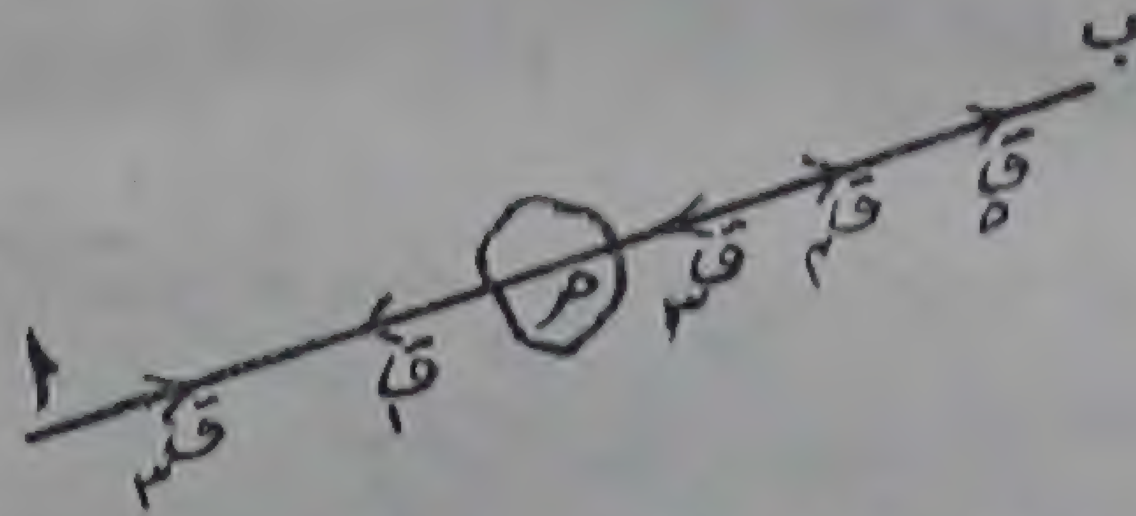


شکل ۷۸ ۔ دو مساوی اور مخالف قوتیں

اگر ایک ہی خطِ مستقیم میں کئی قوتیں کسی جسم کے ایک نقطے پر عمل کریں اور اگر ایک جہت والی قوتوں کا مجموعہ مخالف جہت والی قوتوں کے مجموعہ کے مساوی ہو تو جسم توازن میں ہوگا۔ اگر ایک جہت والی قوتوں کو مثبت مانیں اور مخالف جہت والی قوتوں کو منفی، تو یہ شرط اِس طرح بیان کی جا سکتی ہے کہ دی ہوئی قوتوں کا جبری مجموعہ صفر ہونا چاہیئے ۔ چنانچہ قوتیں $ق_۱$، $ق_۲$، $ق_۳$، وغیرہ (شکل ۷۹) ایک دوسری کو تراز و کر لینگی بشرطیکہ

$$ق_۱ + ق_۲ - ق_۳ - ق_۴ - ق_۵ = ۰$$

$$\text{یا}\quad \Sigma\, ق = ۰ \qquad (۱)$$

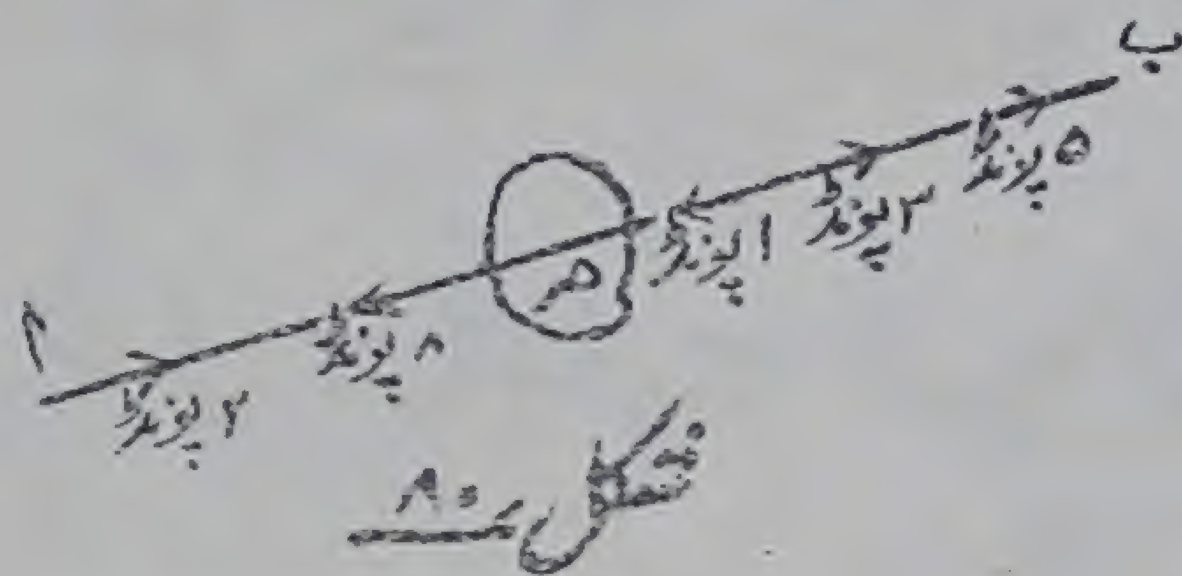


شکل ۷۹۔ ایک ہی خطِ مستقیم میں قوتیں

رمز Σ (سگما[1] معکوس) سے مُراد "جبری مجموعہ" ہے۔ رمز کے بعد ق لکھنے سے یہ مطلب ہے کہ اِن قوتوں میں سے صرف ایک ہی لی جائے جن کا نمونہ ق ہے۔ مساوات (۱) کو لفظوں میں یوں ادا کرینگے:۔ اِن قوتوں کا جبری مجموعہ، جن کا نمونہ ق ہے، صفر کے برابر ہے
اگر مساوات (۱) سے ایسا عددی نتیجہ نکلے جو صفر نہ ہو تو یہ سمجھنا چاہیئے کہ دی ہوئی قوتیں ایک دُوسری کو تھام نہیں لیتیں بلکہ اُن کا ایک حاصل ہے جس کی قدر حساب کردہ نتیجہ کے مساوی ہے۔ حاصل کے مساوی اور مخالف قوت استعمال کرنے سے توازن قائم ہو سکتا ہے۔ اِس قوت کو اِس نظام کا **موازن** کہتے ہیں۔ فرض کرو کہ ح اور م علی الترتیب حاصل اور موازن کو ظاہر کرتے ہیں تو

ح = م

ح کی جہت مُثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔ یہ اِس پر منحصر ہے کہ دی ہوئی مثبت قوتوں کا مجموعہ دی ہوئی منفی قوتوں کے مجموعہ سے زیادہ ہے یا کم چنانچہ شکل ۸۰ میں



شکل ۸۰

[1] Sigma

جہاں ا سے ب کی طرف جہت رکھنے والی قوتیں مثبت ہیں۔

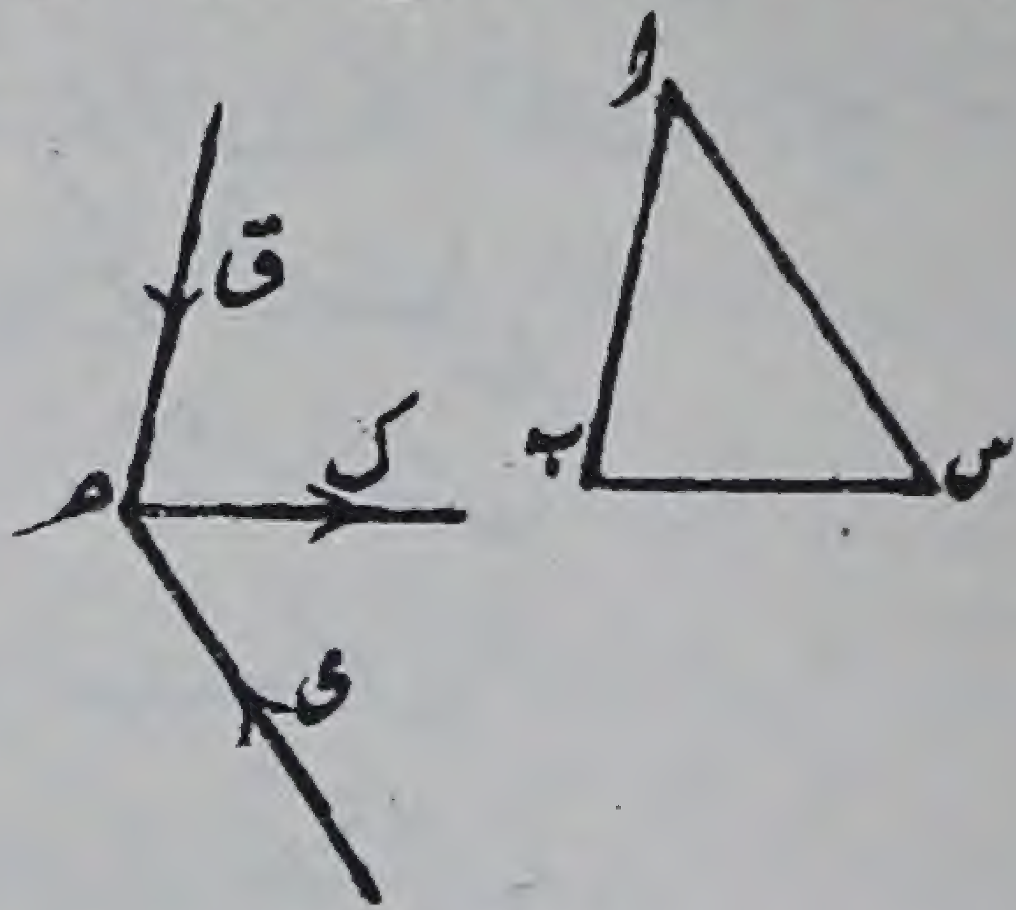
۲+۳+۵-۸-۱ = +۱

پس دی ہوئی قوتوں کے بجائے ۱ پونڈ کی ایک ہی قوت عمل پیرا ہوسکتی ہے جس کی جہت ا سے ب کی طرف ہوگی، اس نتیجہ کو ہم مساوات

ح = Σ ق ....(۲)

سے ظاہر کرسکتے ہیں۔

تین متقاطع قوتیں:۔ دو قوتیں جن کے خطوطِ قوت کسی نقطے پر متقاطع ہوں اس طرح متوازن کی جاسکتی ہیں کہ پہلے قوتوں کے متوازی الاضلاع یا مثلث کے رُو سے اِن کا حاصل دریافت کیا جائے۔ اور پھر اِن دونوں قوتوں کے بجائے اِس نقطہ پر دریافت شدہ حاصل کو لگایا جائے، اِس سے کسی قسم کا کوئی تغیر پیدا نہ ہوگا۔ اِس طرح سے عمل پیرا حاصل کو اِس کے مساوی اور مخالف موازن استعمال کر کے ترازو کیا جاسکتا ہے۔ شکل ۸۱ اِس طریقہ کی توضیح کرتی ہے۔ دو قوتیں ق، ک دی ہوئی ہیں جو م پر عمل کرتی ہیں۔



شکل ۸۱۔ قوتوں کا مثلث

قوتوں کے مثلث میں اب سے ق ظاہر ہوتا ہے اور ب س سے ک، اس سے ح ظاہر ہوتا ہے، اِس لئے س ا موازن ی کو ظاہر کرتا ہے، جو اب م پر س ا کے متوازی ایک

خط میں عمل کرتا ہے اور جس کی جہت حروف س ا کی ترتیب سے ظاہر ہوتی ہے۔

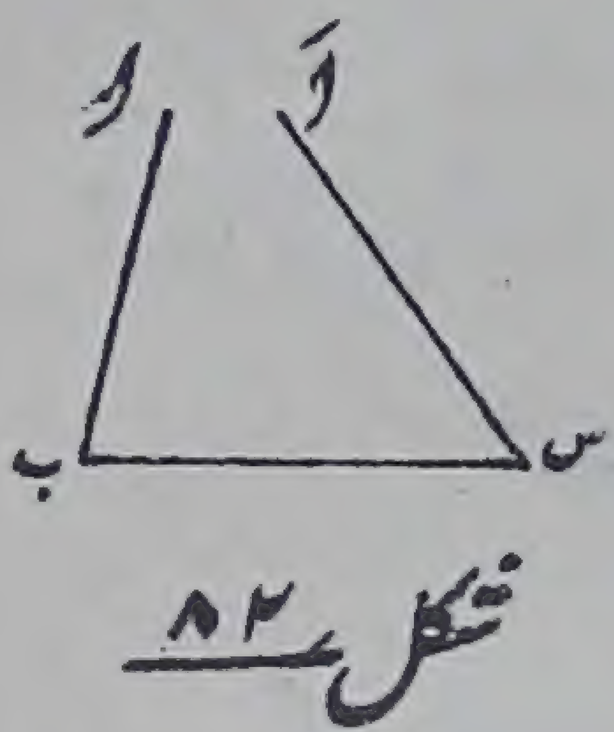
اب تین متقاطع قوتوں کے توازن کی شرطیں حسبِ ذیل ہوئیں :۔

(ا) اِن سب کو ایک ہی مستوی میں عمل کرنا چاہیئے۔

(ب) اِن سب کو ایک ہی نقطہ پر عمل کرنا چاہیئے۔

(س) اِن کو اِس قابل ہونا چاہیئے کہ ایک بند مثلث کے ضلعوں سے ترتیب وار اِن کو ظاہر کیا جا سکے۔

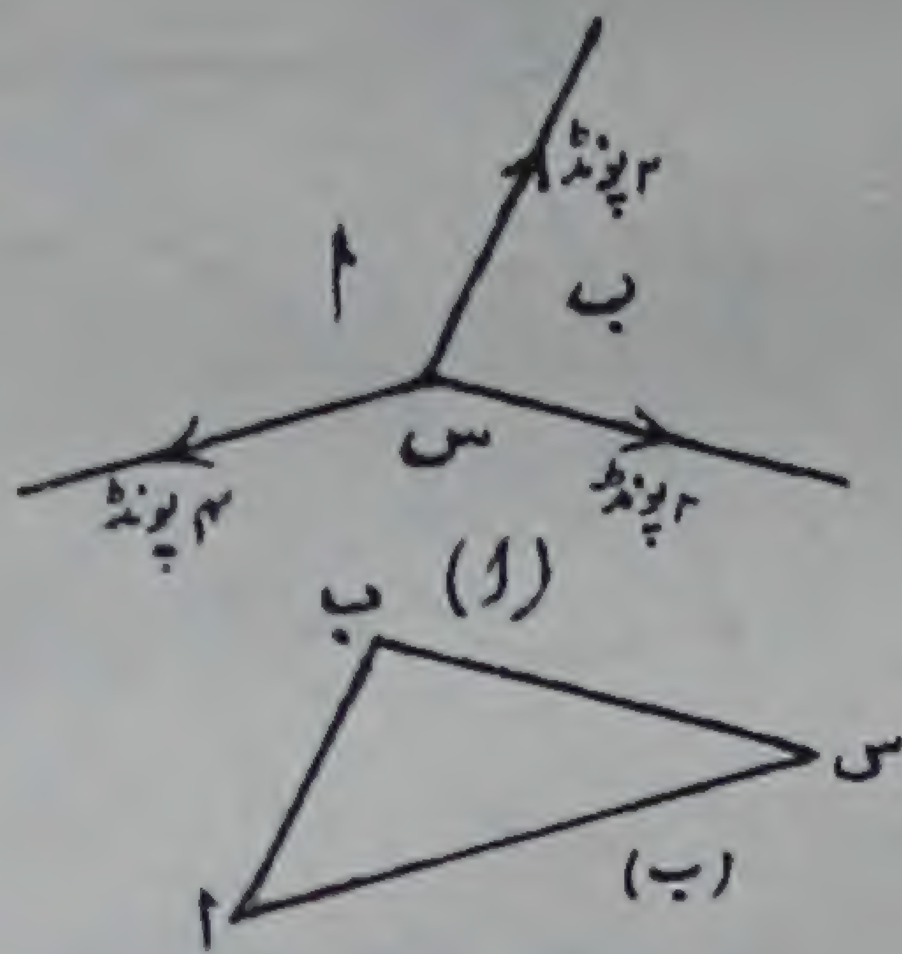
شکل ۸۱ میں قوتوں کے مثلث ا ب س کو دیکھنے سے شرط (س) کے معنی سمجھ میں آسکتے ہیں۔ اِس میں ق، ک، ی علی الترتیب ا ب، ب س اور س ا سے ظاہر ہوتے ہیں، اِن حرفوں کی ترتیب ہر قوت کی جہت کو ظاہر کرتی ہے، شکل ایک بند مثلث ہے اور اِس کا گھیرا اِس طرح طے ہُوا ہے کہ ا سے شروع ہو کر ا پر ختم ہُوا ہے اور درمیان میں اس کی کہیں ضرورت نہیں پڑی کہ کسی قوت کے بتلانے کے لئے سمت بدلی جائے۔ اگر دی ہوئی تین قوتوں کے لئے قوتوں کا مثلث بند ہونے سے قاصر رہے یعنی ا اور اَ کے درمیان کچھ فصل رہے جیسا کہ شکل ۸۲ میں ہے جہاں ا ب، ب س، س اَ قوتوں کو ظاہر کرتے ہیں تو ہم کو یہ نتیجہ نکالنا چاہیئے کہ دی ہوئی قوتوں میں تسویہ نہیں ہے۔



شکل ۸۲

مثال :۔ تین دی ہوئی قوتیں توازن میں ہیں (شکل ۸۳)، قوتوں کا مثلث کھینچو۔

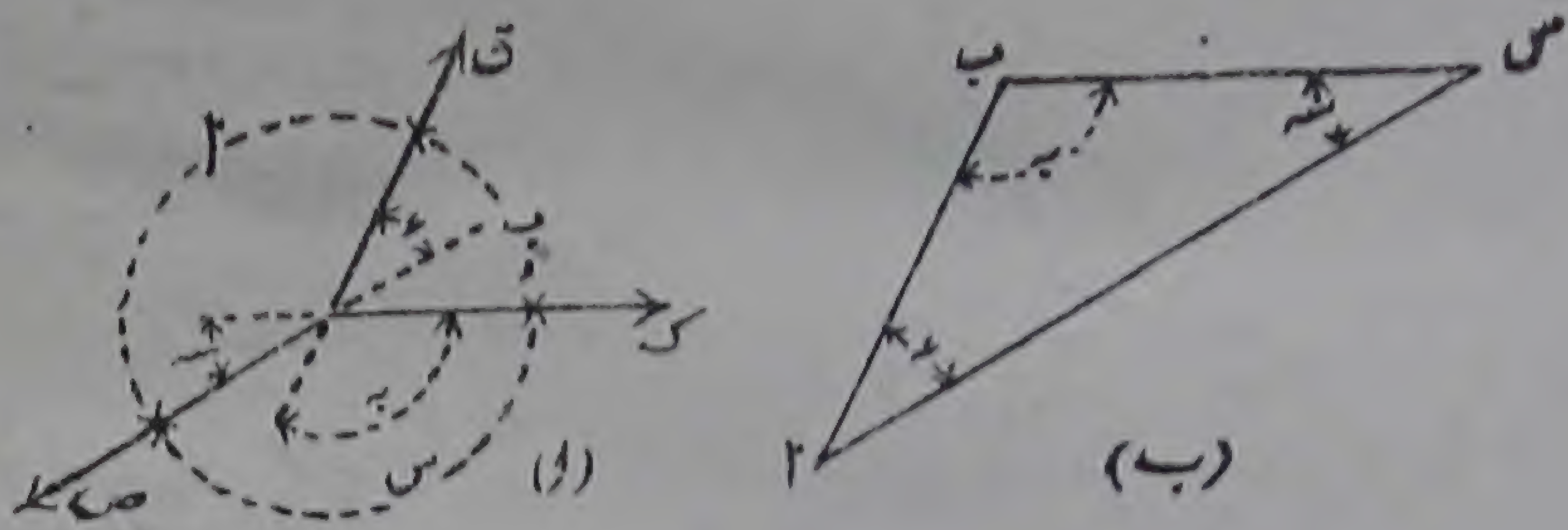
قوتوں کے حروف
اندازی کے ایک سہل طریقے کی توضیح کے لئے یہ مثال دی گئی ہے۔ اِس طریقہ کو **ارقامِ بو** کہتے ہیں۔ طریقہ یہ ہے کہ بجائے قوتوں کے اِن کی درمیانی جگہوں پر حروف ڈالتے ہیں۔ شکل ۸۳ (ا) میں ۴ پونڈ اور ۲ پونڈ کی درمیانی جگہ کو ا کہو، ۲ پونڈ اور ۳ پونڈ کی جگہ کو ب اور باقی جگہ کو س کہو۔ جگہ ا سے جگہ ب میں جاتے وقت جس قوت کو عبور کیا جاتا ہے اُس کے متوازی اور متناسب ایک خط اب کھینچا جاتا ہے [شکل ۸۳ (ب)] اور حروف اندازی اِس طرح کی جاتی ہے کہ ا سے ب کی ترتیب اِس قوت کی جہت کو ظاہر کرے۔ اب جگہ ب سے جگہ س میں چلو اور ب س کو کھینچکر کامل طور سے عبور کردہ قوت کو ظاہر کرو۔ اِس عمل کو جگہ س سے جگہ ا میں گزار کر پورا کرو تو (شکل ۸۳ (ب)) س ا کامل طور سے تیسری قوت کو ظاہر کریگا۔



شکل ۸۳ ۔ ارقامِ بو کا استعمال

اِن شکلوں پر غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ شکل ۸۳ (ا) میں نقطۂ عمل کے گرد ایک کامل گردش عمل میں آئی ہے نیز یہ کہ گردش کی سمت کہیں پلٹی نہیں گئی ہے۔ نیز شکل ۸۳ (ب) میں اگر گردش کی وُہی ترتیب قائم رکھی جائے تو ضلع مختلف قوتوں کی جہت کو صحیح صحیح ظاہر کریں گے۔ نقطۂ عمل کے گرد گھومتے وقت ہر دو سمتوں کو استعمال کرسکتے ہیں خواہ موافق سمت ساعت ہو یا مخالف سمت ساعت لیکن جب ایک مرتبہ سمت متعین کرلی جائے تو پھر پلٹنا نہیں چاہیئے۔

قوتوں اور زاویوں میں علاقہ:۔ شکل ۸۴ (ا) میں تین قوتیں ق، ک، ص توازن میں ہیں اور ا ب س [شکل ۸۴ (ب)] قوتوں کا مثلث ہے۔



شکل ۸۴ - قوتوں اور زاویوں میں علاقہ

تو ق : ک : ص = اب : ب س : س ا

اب اب : ب س : س ا = جب سہ : جب عہ : جب بہ

یا ق : ک : ص = جب سہ : جب عہ : جب بہ - (۱)

شکل ۸۴ (ا) میں شکستہ خطوط ظاہر کرتے ہیں کہ عہ بہ، سہ علی الترتیب ص اور پ، پ اور ک اور ک اور ص کی بڑھی ہوئی سمتوں کے درمیانی زاویے ہیں۔ نیز اسی شکل میں ا، ب، س سے ظاہر شدہ زاویے یا جگہیں ان زاویوں کا تکملہ ہیں۔ چونکہ کسی زاویے کی جیب اس کے تکملے کی جیب کے مساوی ہوتی ہے اس لئے شکل ۸۴ (ا) میں

ق : ک : ص = جب س : جب ا : جب ب - - (۲)

پس اگر تین متقاطع قوتیں توازن میں ہوں تو ہر قوت بقیہ دو قوتوں کے درمیانی زاویے کے جیب کے متناسب ہوتی ہے۔

قوت کے مستطیل اجزا :- مسئلوں کے حل کرنے میں سہولت اکثر اس میں ہوتی ہے کہ خود قوت کے بجائے اس کے منتخب اجزا استعمال کئے جائیں۔ عموماً یہ اجزا ایسے دو خطوں پر لئے جاتے ہیں جو خطِ قوت پر زاویۂ قائمہ بناتے ہوئے ملیں۔ یہ تینوں خطوط ایک ہی مستوی میں

ہونا چاہئیں۔ شکل ۸۵ میں م س ایک دی ہوئی قوت ق کو ظاہر کرتا ہے۔ اجزا م ا اور م ب کی سمت میں درکار ہیں جو م پر ۹۰° پر متقاطع ہیں۔ قوتوں کے متوازی الاضلاع م ب س ا کو مکمل کرو،

شکل ۸۵۔ قوت کے مستطیل اجزاء

اس صورت میں یہ ایک مستطیل ہے۔ فرض کرو کہ زاویہ س م ا = عہ ہے۔ تو اجزا ص اور ت حسب ذیل طریقہ پر حاصل ہوتے ہیں:-

ا س = م ب = م س جب عہ

∴ ص = ق جب عہ ....(۱)

م ا = م س جم عہ

∴ ت = ق جم عہ ....(۲)

م س^{2} = ا س^{2} + م ا^{2} = م ب^{2} + م ا^{2}

∴ ق^{2} = ص^{2} + ت^{2} ....(۳)

حاصل اور مائل اجزاء میں علاقہ:- شکل ۸۶ میں اجزاء ق اور ک دئے ہوئے ہیں اور حاصل ح قوتوں کے متوازی الاضلاع م ا س ب سے حاصل ہوا ہے۔

شکل ۸۶۔ قوت کے مائل اجزا

علمِ مثلث سے ہم کو معلوم ہے کہ

م س^2 = م ا^2 + ا س^2 − ۲ م ا × ا س × جم م ا س

نیز ا س = م ب اور جم م ا س = − جم س ا لا

= − جم ا م ب

∴ م س^2 = م ا^2 + م ب^2 + ۲ م ا × م ب × جم ا م ب

یا ح^2 = ق^2 + ک^2 + ۲ ق ک جم ا م ب ......(۱)

م ا سے جو زاویہ ح بناتا ہے اُس کی قیمت عہ معلوم کرنے کے لئے

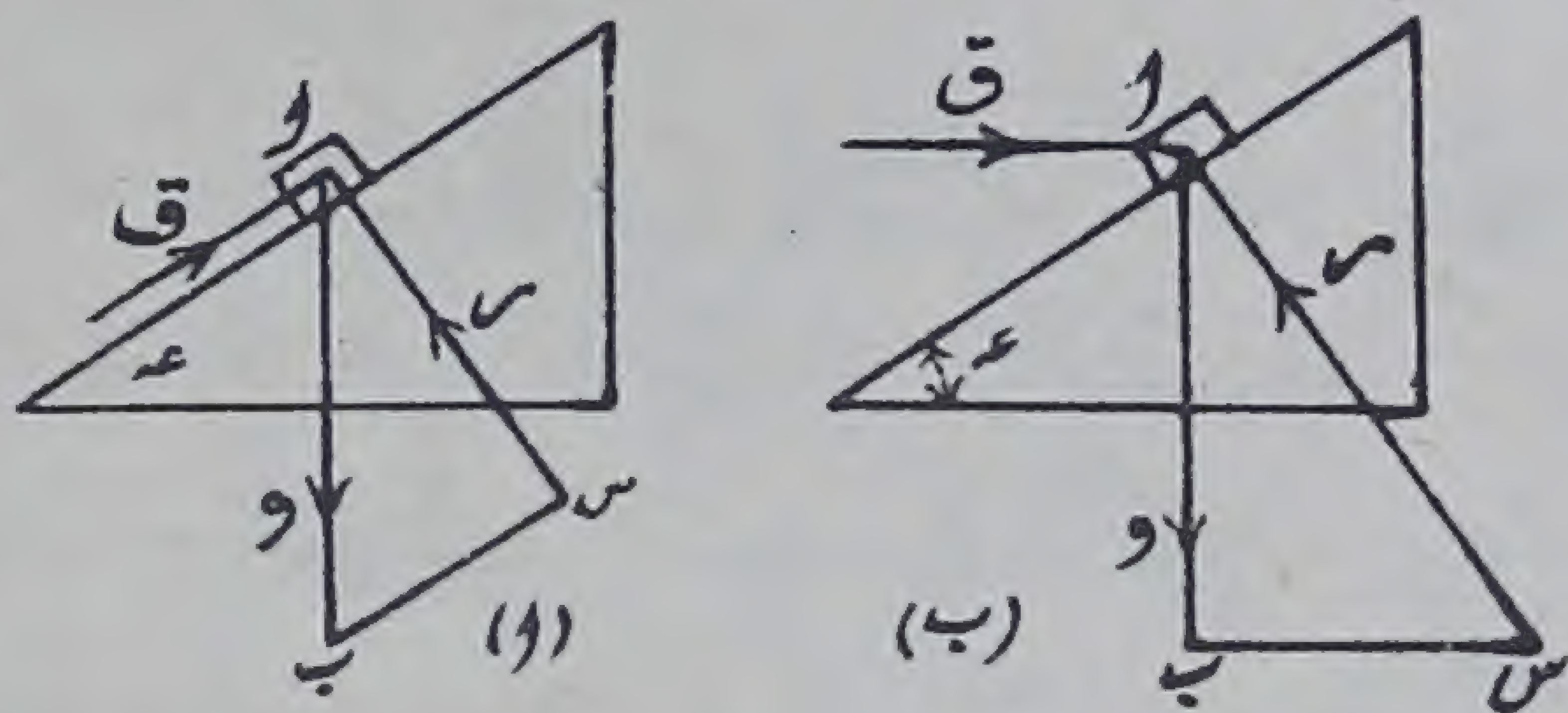
ک / ح = جب عہ / جب م ا س = جب عہ / جب س ا لا = جب عہ / جب ا م ب

∴ جب عہ = (ک / ح) جب ا م ب ......(۲)

مثال ۱ :- ایک ذرّے کو جس کا وزن و ہے ایک ملیس سطح پر جو اُفقی سے زاویۂ عہ پر مائل ہے ایک قوت (ا) سطح کے متوازی (ب) اُفق کے متوازی، بحالتِ سکون قائم رکھتی ہے ۔ اِن قوتوں کو دریافت کرو۔

اصطلاح **ملیس** [چکنی] سے مُراد یہ ہے کہ اِس سطح پر کسی قسم کی رگڑ کی قوتیں موجود نہیں ہیں۔ اگر ایسی سطح کا وجود ممکن ہو تو وہ اپنے سے مَس کرتے ہوئے جسم پر کسی قسم کا کوئی عمل نہ کریگی سوائے اِس کے کہ جو نقطۂ تماس پر سطح کے عماد کی سمت میں ہوگا۔

(ا) شکل ۸۷ (ا) میں و کو ا ب ظاہر کرتا ہے، قوت مطلوبہ ق،



شکل ۸۷ ملیس مائلوں پر ذرّے

اور سطح کا عمادی ردِّ عمل ر، دونوں علی الترتیب قوتوں کے مثلث ا ب س کے ضلعوں ب س اور س ا سے ظاہر ہوتے ہیں۔ چونکہ یہ خطوط علی الترتیب سطح کے متوازی اور اُس پر علی القوائم ہیں اس لئے زاویۂ ب س ا قائمہ ہے، نیز ب ا س = عہ

$$\therefore \frac{ق}{و} = \frac{ب س}{ا ب} = \text{جب عہ}$$

$$\therefore ق = و \text{ جب عہ}$$

ر کی قیمت یوں معلوم ہو سکتی ہے :-

$$\frac{ر}{و} = \frac{س ا}{ا ب} = \text{جم عہ}$$

$$\therefore ر = و \text{ جم عہ}$$

(ب) اِس صورت میں قوتوں کا مثلث قائم الزاویہ مثلث ا ب س ہے [شکل ۸۷ ب]

$$\frac{ق}{و} = \frac{ب س}{ا ب} = \text{مس عہ}$$

$$\therefore ق = و \text{ مس عہ}$$

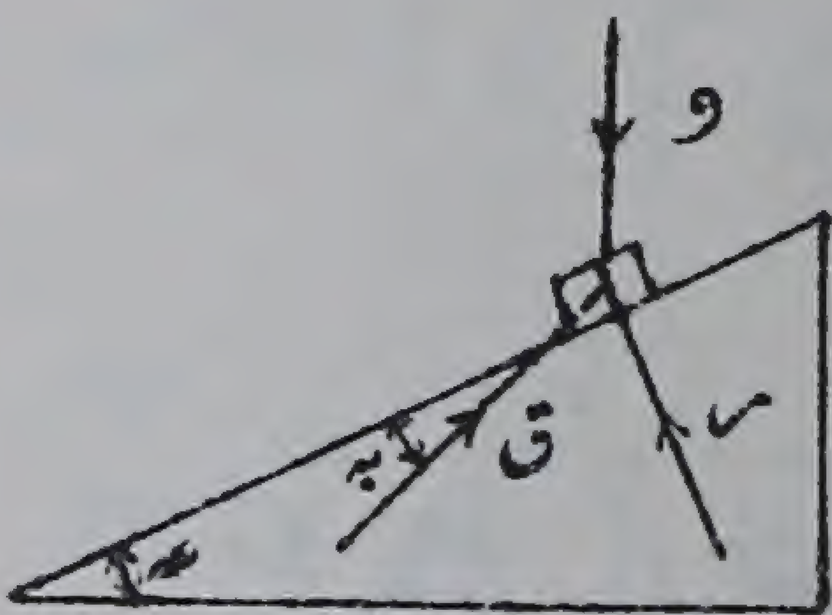
نیز

$$\frac{ر}{و} = \frac{س ا}{ا ب} = \text{قط عہ}$$

$$\therefore ر = و \text{ قط عہ}$$

مثال ۲ :- و وزن کے ایک ذرّے کو ایک ملیس سطح پر، جو اُفقی سے زاویہ عہ بناتی ہے ایک قوت ق، جو خود سطح سے زاویہ بہ پر ہے، قائم رکھتی ہے [شکل ۸۸] تو ق اور سطح کے ردِّ عمل کو دریافت کرو۔

شکل ۸۸ میں ق اور ر کے درمیان زاویہ (۹۰° - بہ) ہے، نیز و اور ر کے درمیان زاویہ (۱۸۰° - عہ) ہے۔



شکل ۸۸

پس [صفحہ ۱۳۲]

ق / و = جب (۱۸۰ - عہ) / جب (۹۰ - بہ) = جب عہ / جب بہ

∴ ق = و جب عہ / جب بہ

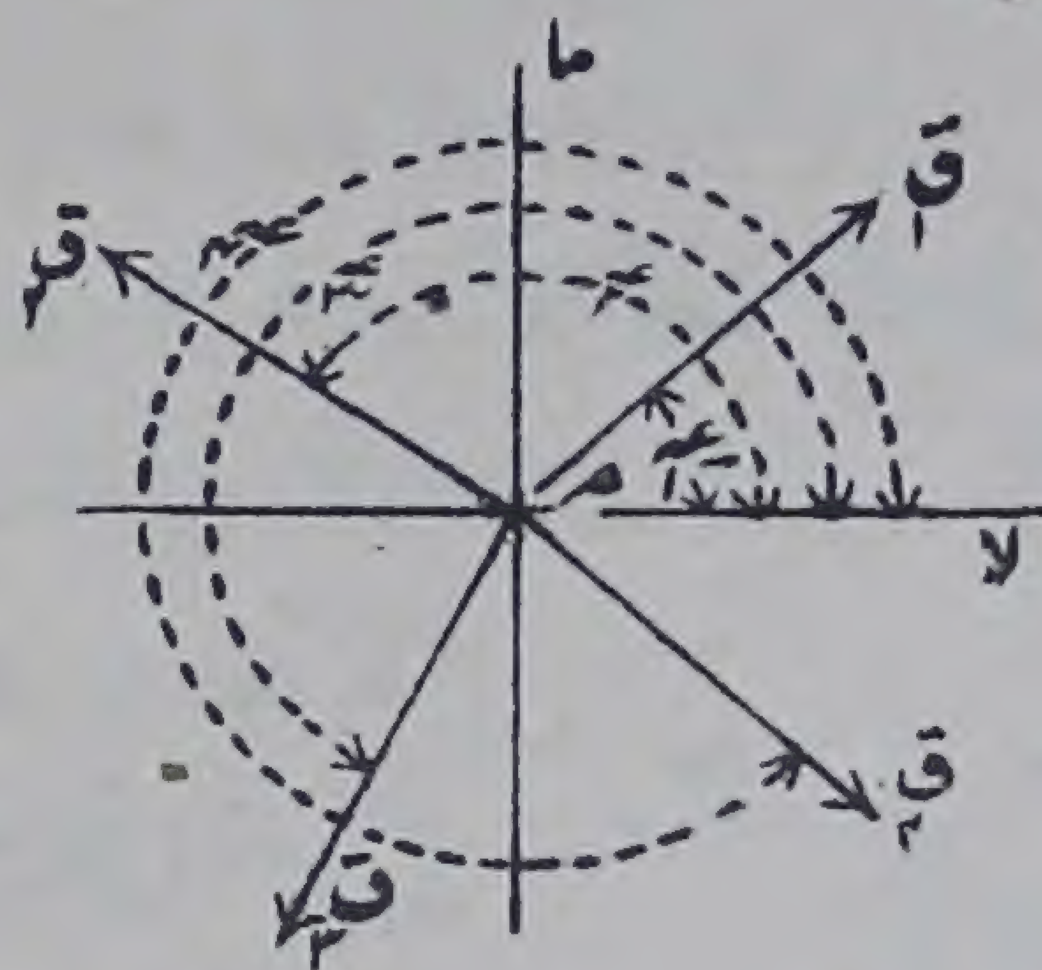
ق اور و کے درمیان زاویہ (۹۰° + عہ + بہ) ہے

∴ ر / و = جب (۹۰ + عہ + بہ) / جب (۹۰ - بہ) = جم (عہ + بہ) / جم بہ

= (جم عہ جم بہ - جب عہ جب بہ) / جم بہ

= و (جم عہ - جب عہ مس بہ)

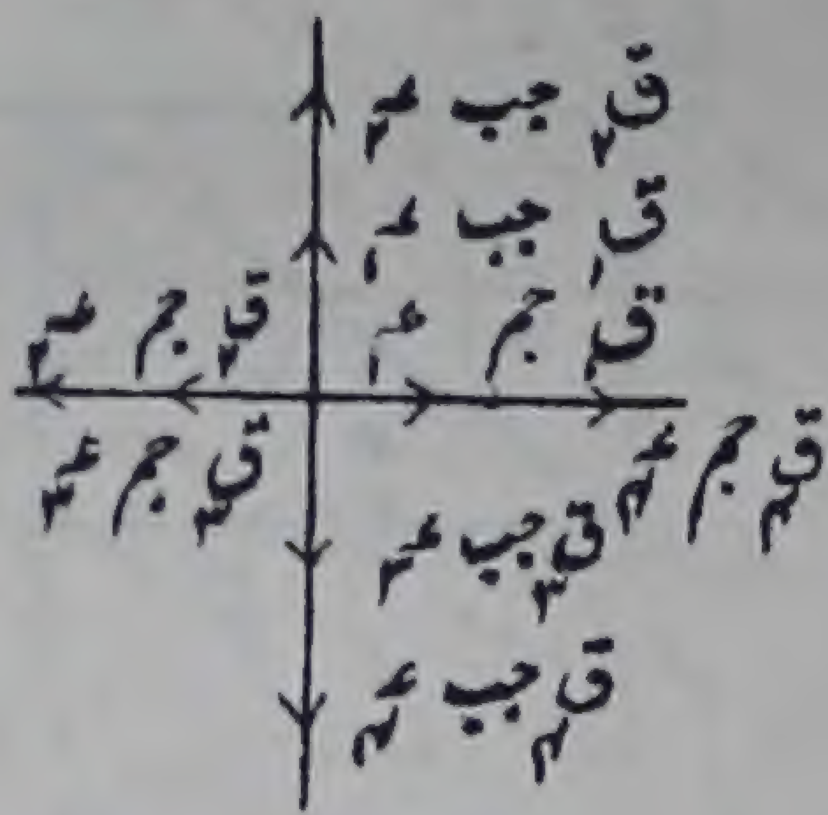
یک مستوی متراکز قوتوں کے نظام :- شکل ۸۹ میں ق۱، ق۲، ق۳، ق۴ چار قوتیں ہیں جو ایک ہی مستوی میں ہیں اور ایک ہی نقطہ م پر متقاطع ہیں۔ م لا اور م ما دو محور ہیں جو اسی مستوی میں ہیں اور م پر ۹۰° پر متقاطع ہیں۔



شکل ۸۹ - ایک نقطہ پر عمل کرنے والی یک مستوی قوتوں کے نظام

قوتوں کی سمتوں کے زاویئے م لا کے لحاظ سے بیان کئے جاتے

ہیں۔ چنانچہ ع۱، ع۲، ع۳، عہ سے ظاہر کئے گئے ہیں جیبوں اور جیب التماموں کی جبری علامتوں کے متعلق معمولی قرار دادوں سے فائدہ اُٹھانے کی غرض سے دی ہوئی قوتیں اِس طرح ترتیب دی جانی چاہیئں کہ یا تو سب کی سب کھینچ ہوں یا دھکیل ہوں۔ م لا اور م صا کی سمت میں اجزاء لینے سے معلوم ہوا (شکل ۹۰) کہ



شکل ۹۰ - نظام کی تحویل میں پہلا قدم

م لا پر اجزاء:- ق۱ جم ع۱، ق۲ جم ع۲، ق۳ جم ع۳، قہ جم عہ ہیں اور م صا پر اجزا:- ق۱ جب ع۱، ق۲ جب ع۲، ق۳ جب ع۳، قہ جب عہ ہیں۔

جبری علامتوں کا لحاظ کرنے سے م لا پر جو اجزاء داہنی جانب ہیں وہ مثبت ہیں اور دوسرے منفی ہیں۔ اِسی طرح م صا پر جو اجزا اُوپر کی جانب ہیں وہ مثبت ہیں اور دوسرے منفی ہیں۔ م لا اور م صا پر اجزا کے حاصل حلا اور حصا کی قیمت حسب ذیل ہے:-

ق۱ جم ع۱ + ق۲ جم ع۲ + ق۳ جم ع۳ + قہ جم عہ = حلا

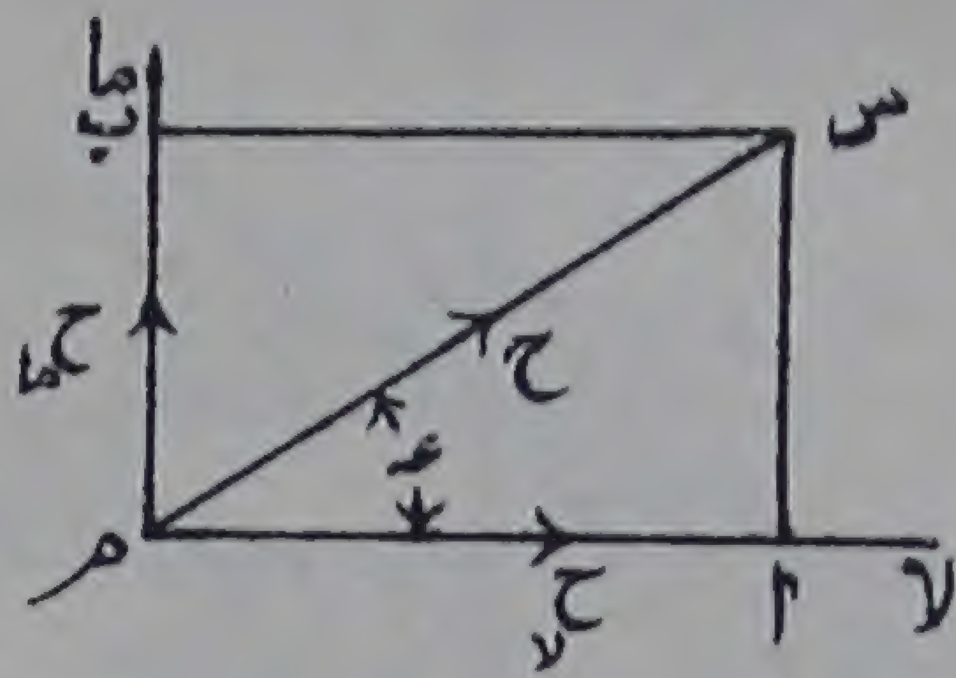
ق۱ جب ع۱ + ق۲ جب ع۲ + ق۳ جب ع۳ + قہ جب عہ = حصا

یا اِن کے لکھنے کا مختصر طریقہ استعمال کرنے سے

$$ح_ا = ع ق جم عہ \quad - - - - - - - (۱)$$

$$ح_ما = ع ق جب عہ \quad - - - - - - - (۲)$$

دئے ہوئے نظام کو اس طرح دو قوتوں $ح_ا$ اور $ح_ما$ میں تحویل کر لیا ہے جیسا کہ شکل ۹۱ میں دکھلایا ہے۔ حاصل ح کو معلوم کرنے کے لئے ہم جانتے ہیں کہ



شکل ۹۱ ۔شکل ۸۹ میں دئے ہوئے نظام کا حاصل

$$ح = \sqrt{ح_ا^۲ + ح_ما^۲} \quad \ldots\ldots (۳)$$

$$مس\ عہ = \frac{س\ ا}{م\ ا} = \frac{م\ ب}{م\ ا} = \frac{ح_ما}{ح_ا} \quad \ldots\ldots (۴)$$

دیا ہُوا نظام اس وقت **توازن** میں ہوگا جب کہ $ح_ا$ اور $ح_ما$ دونوں صفر ہوں۔توازن کی جبری شرائط (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتی ہیں:۔

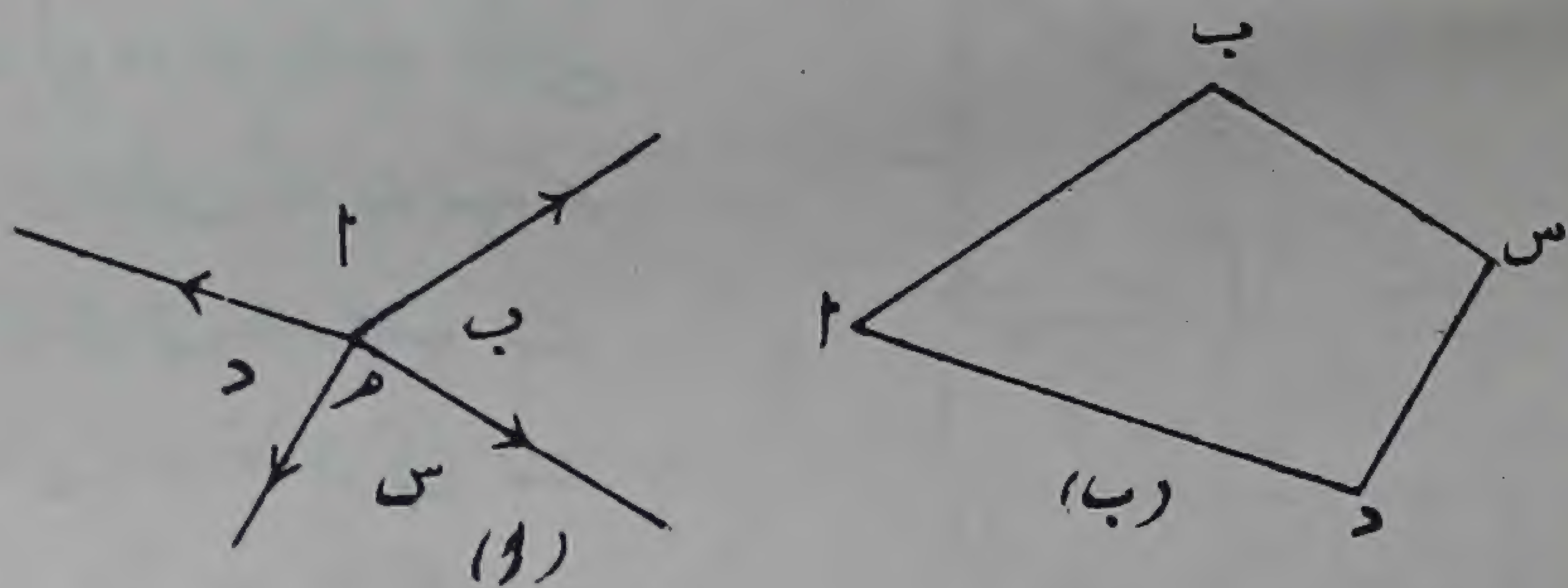
$$ع ق جم عہ = ۰ \quad \ldots\ldots (۵)$$

$$ع ق جب عہ = ۰ \quad \ldots\ldots (۶)$$

یک مستوی اور ہمتراکز قوتوں کے نظام کے توازن کے متعلق کسی مسئلے کے حل کرنے کے لئے یہ دونوں ہمزاد مساواتیں استعمال کی جاسکتی ہیں۔

قوتوں کے کثیر الاضلاع کے ذریعہ سے ترسیمی حل :-

سمتی جمع کے اصول کو استعمال کر کے، ایک نقطہ پر عمل کرنے والی متعدد یک مستوی قوتوں کے توازن کی جانچ کی جا سکتی ہے۔ شکل ۹۲ (ا) میں ایسی چار قوتیں دی گئی ہیں۔ اور ارقام بو کی رُو سے حروف اندازی کیگئی ہے [صفحہ ۱۳۱]۔ جگہ ا سے شروع کر کے م کے گرد سمت ساعت میں



شکل ۹۲۔ قوتوں کا کثیر الاضلاع

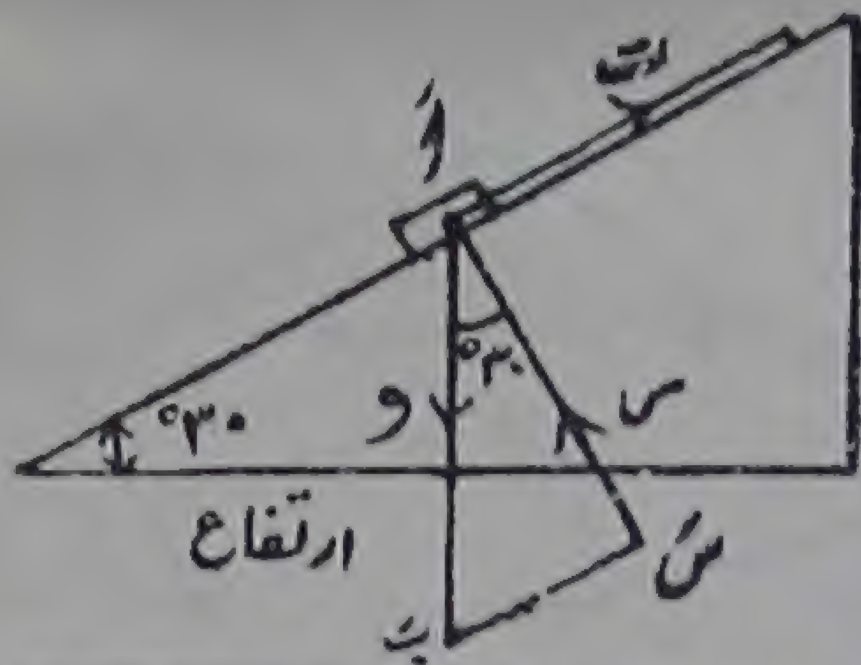
چل کر، ہر عبور شدہ قوت کو مکمل طور سے ظاہر کرنے کے لئے خطوط کھینچے جاتے ہیں شکل ۹۲ (ب)۔ ایک بند کثیر الاضلاع ا ب س د کا حاصل ہونا اس امر کی کافی شہادت ہے کہ قوتیں توازن میں ہیں۔ اگر کہیں فصل رہتا تو اس سے یہ ظاہر ہوتا کہ قوتوں کا حاصل بھی ہے جس کو وہ خط ظاہر کرتا جو اس فصل کو پُر کرنے کے لئے کھینچا جاتا۔ اور اس نظام کا موازن حاصل کے مساوی اور مخالف ہوتا۔ شکل ۹۲ (ب) کو **قوتوں کا کثیر الاضلاع** کہتے ہیں۔

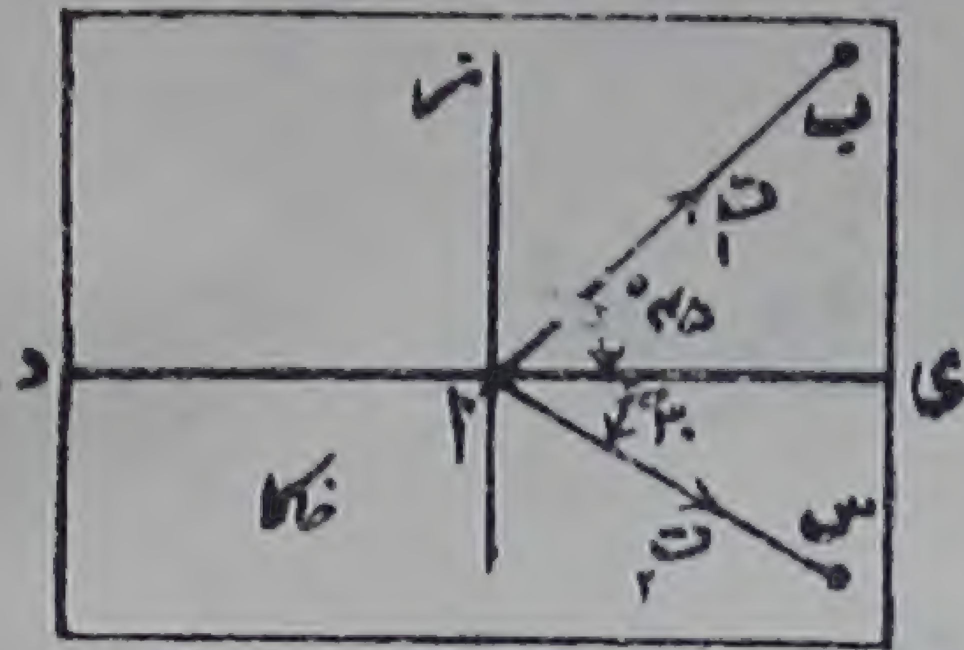
لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ یک مستوی قوتوں کا نظام جو ایک نقطے پر عمل کرے، توازن میں ہوگا، **بشرطیکہ ایک بند کثیر الاضلاع ایسا کھینچا جا سکے جس کے ضلعے ترتیب وار کامل طور سے دی ہوئی قوتوں کو ظاہر کریں۔**

متراکز قوتیں جو ایک مستوی میں نہ ہوں :- ایسی

قوتوں کے مسئلے جو ایک مستوی میں نہ ہوں اِس کتاب کی بساط سے باہر ہیں ۔ ذیل کی مشقوں سے وہ طریقہ معلوم ہوگا جس سے ہم ایسی قوتوں کے سہل مسائل حل کر سکتے ہیں :۔

مثال :۔ شکل ۹۳ میں ایک خانے کا خاکا اور اِرتفاع دکھلایا گیا ہے ۔ بالائی سطح چکنی ہے اور اُفقی سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے ۔ خانہ پر و وزن کا ایک ذرہ ا دو ہلکے ڈوروں اب اور اس کی مدد سے بحالتِ سکون رکھا ہے ۔ یہ دونوں ڈورے ب اور س پر بندھے ہیں اور سب سے زیادہ ڈھال والے خط د ی سے علی الترتیب ۴۵° اور ۳۰° کا زاویہ بناتے ہیں ۔ تو اب اور اس پر علی الترتیب کھینچ ت۱ اور ت۲ کو دریافت کرو ۔





شکل ۹۳

[انتباہ :۔ ۴۵° اور ۳۰° کے زاویوں کی اصلی وسعت شکل ۹۳ کے خاکے میں نہیں دکھلائی جا سکتی] ۔

د ا ی اور د ا ی سے ۹۰° پر ایک اُفقی محور ا ز کی سمت والے اجزاء میں ت۱ اور ت۲ کو تحلیل کرو ۔ د ا ی کی سمت میں اجزاء ت۱ جم ۴۵° اور ت۲ جم ۳۰° ہیں اور دونوں کی جہت ایک ہی ہے ۔ ا ز کی سمت میں اجزاء ت۱ جب ۴۵° اور ت۲ جب ۳۰° ہیں اور اُن کی جہتیں مختلف ہیں [شکل ۹۳ خاکا] ۔

ا ز کی سمت میں توازن کے لئے

$$ت_۱ \text{ جب } ۴۵° = ت_۲ \text{ جب } ۳۰°$$

یا

$$\frac{ت_۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲} ت_۲ \quad \text{..........} (۱)$$

فرض کرو $\text{ت} = \text{ت}_1 \,\text{جم}\, 45^\circ + \text{ت}_2 \,\text{جم}\, 30^\circ = \frac{\text{ت}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\text{ت}_2\sqrt{3}}{2}$ [شکل ۹۳ ارتفاع]
تو ت، و اور مستوی کا ردِ عمل ر توازن میں ہیں اور ا ب س قوتوں کا مثلث ہے [شکل ۹۳ ارتفاع] پس

$$\frac{\text{ت}}{\text{و}} = \frac{\text{ب س}}{\text{ا ب}} = \text{جب}\, 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \text{ت} = \frac{1}{2}\text{و}$$

یا
$$\frac{\text{ت}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\text{ت}_2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\text{و} \quad \text{.........}(2)$$

(۱) سے قیمت درج کرنے پر

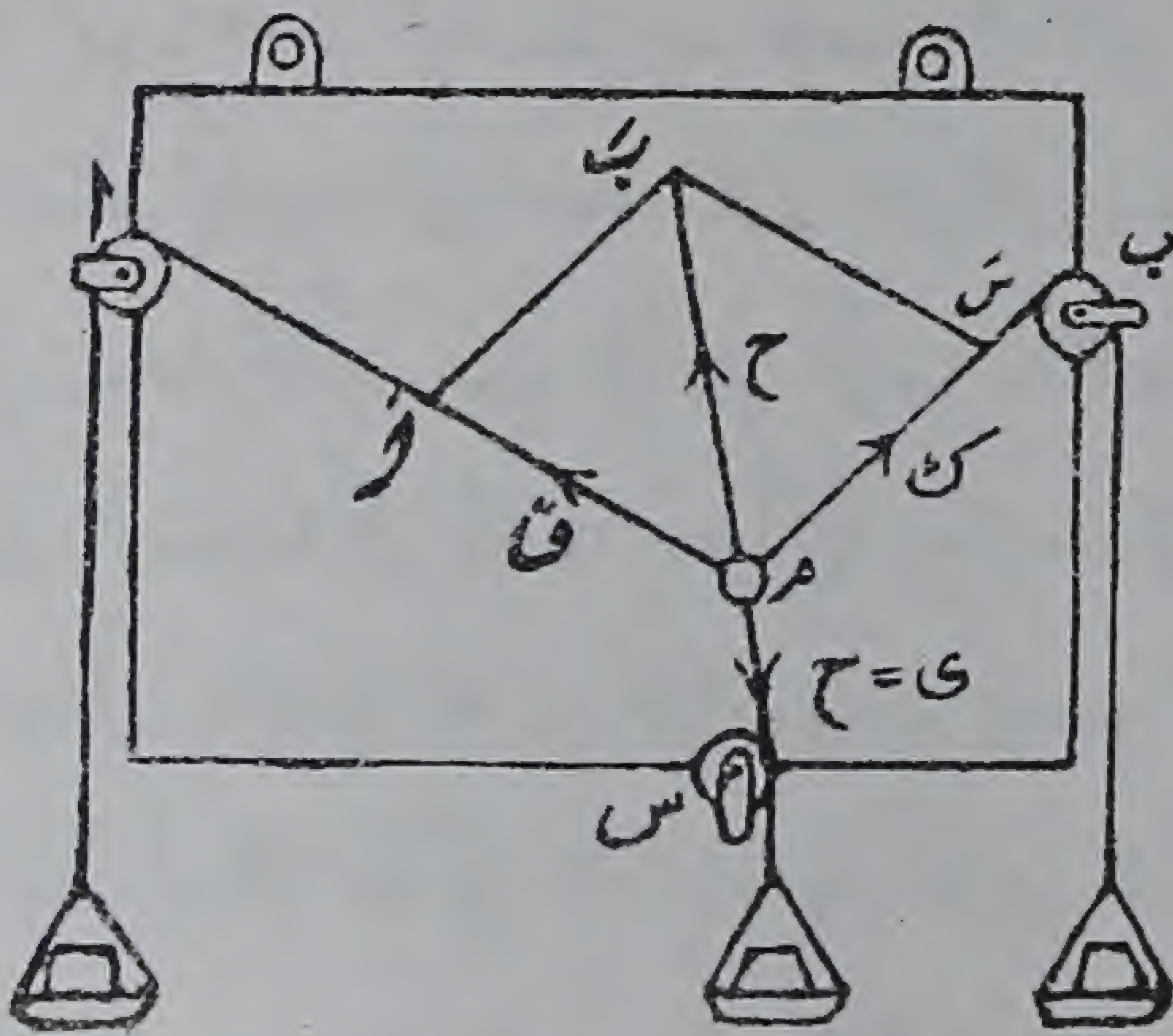
$$\frac{1}{2}\text{ت}_2 + \frac{\text{ت}_2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\text{و}$$

$$\therefore \quad \text{ت}_2 = \frac{\text{و}}{1+\sqrt{3}} \quad \text{.........}(3)$$

اور (۱) سے
$$\text{ت}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ت}_2$$

$$= \frac{\text{و}\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{3})} \quad \text{.........}(4)$$

تجربہ ۱۳:۔ **قوتوں کا متوازی الاضلاع** :۔ شکل ۹۴ میں ایک تختہ دکھلایا گیا ہے جو دیوار پر آویزاں ہے اور جس میں تین چرخیاں ا، ب، س تختے کے کنارے کہیں بھی نصب کی جا سکتی ہیں۔ یہ چرخیاں آسانی سے پھرنے والی ہونی چاہئیں تختہ پر نقشہ کشی کے کاغذ کا ایک ورق لگا دو۔ کسی دی ہوئی وضعوں میں چرخیوں ا اور ب کو کس دو۔ دو ریشمی ڈورے

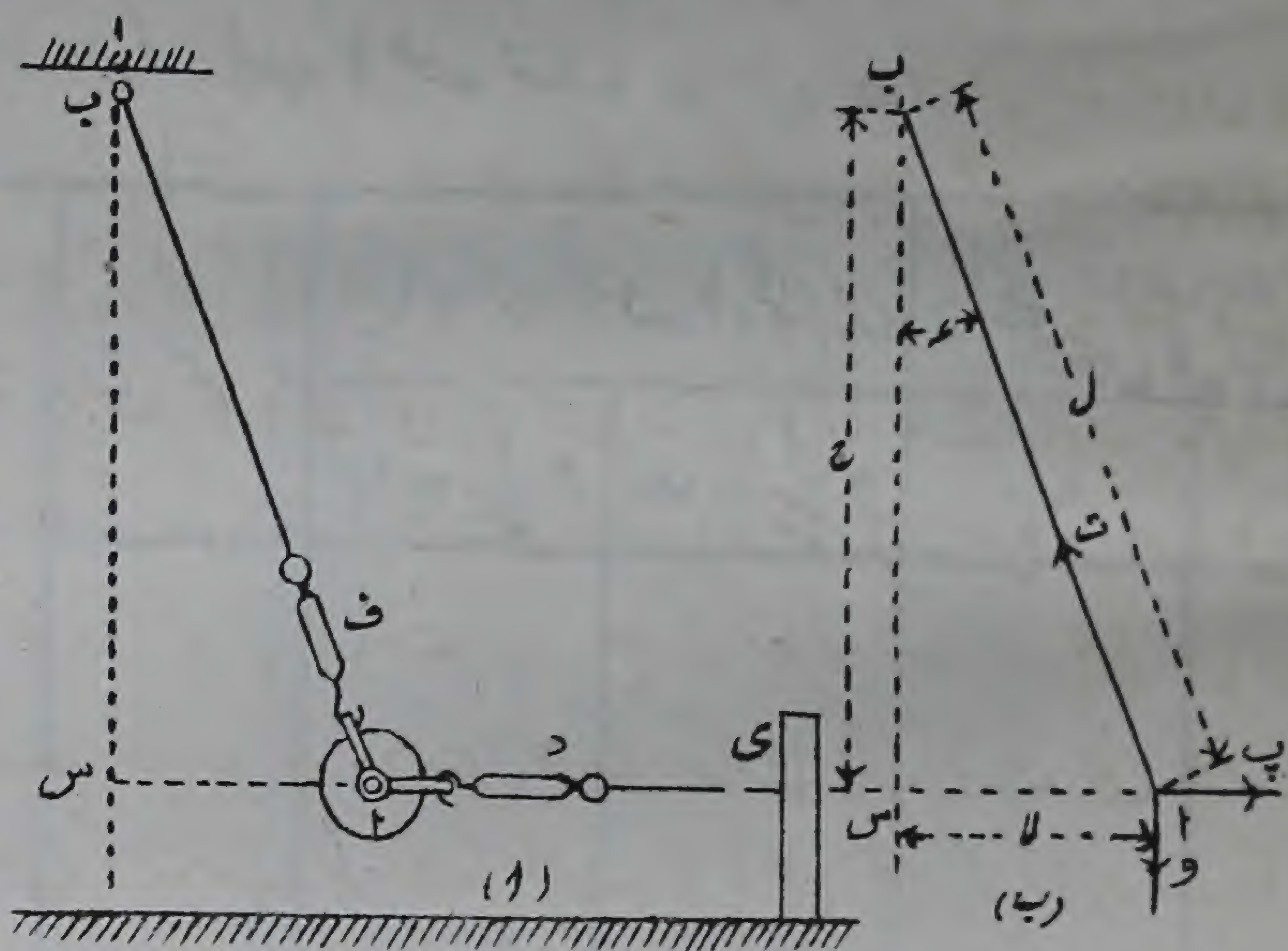


شکل ۹۴۔ قوتوں کے متوازی الاضلاع کی توضیح کے لئے آلہ

ایک چھوٹے سے چھلے میں باندھو۔ چھلے میں سے ایک میخ گزارو جو تختہ میں ھ پر رہے ۔ڈوروں کو چرخیوں ا اور ب پر گزارو ۔ اِن ڈوروں کے سروں پر پلڑے بندھے ہونے چاہیئں تاکہ اوزان رکھے جا سکیں ۔اِس طرح دو معلومہ قوتیں ق اور ک، ھ پر عمل کرتی ہیں ۔ اِن قوتوں کا شمار کرتے وقت یہ لحاظ رہے کہ اوزان کے ساتھ پلڑے کا وزن بھی اِن میں شامل کرلیا جائے۔نہایت ہوشیاری سے کاغذ پر ق اور ک کی سمتوں کا نشان ڈالو۔ اور متوازی الاضلاع ھ اَبَ سَ کے ذریعہ سے اِن کا حاصل ح دریافت کرو ۔ ح کے خط کو بڑھاؤ اور چھلے میں بندھے ہوئے ایک تیسرے ڈورے کی مدد سے ح کے مساوی ایک قوت ی لگاؤ۔ اور تختے پر چرخی س کو مناسب جگہ لگاکے ڈورے کو بالکل ح کے خط پر لے آؤ۔ یہ لحاظ رہے کہ تیسرے پلڑے میں رکھنے کے لئے وزن ی سے بقدر پلڑے کے وزن کے کم ہونا چاہیئے تاکہ وزن اور پلڑا دونوں ی کے مساوی ہوں ۔ اگر یہ عمل صحیح طور پر کیا جائے تو میخ نکال لینے پر بھی چھلا اپنی جگہ نہ بدلیگا۔

عموماً یہ پایا جائیگا کہ میخ نکال لینے کے بعد چھلا ھ سے کچھ فاصلہ پر وضعیں اختیار کرتا ہے ۔اِس کا سبب چرخیوں کی رگڑ اور چرخیوں کے گرد مڑتے وقت ڈوروں کی مضبوطی ہے۔ اور یہ ایسی قوتیں ہیں جن کو ہم اُوپر کے عمل میں بآسانی شمار نہیں کرسکتے۔

تجربہ ۱۴ :۔ **رقّاص** :۔ شکل ۹۵ (ا) میں ایک رقاص دکھایا گیا ہے۔یہ ایک بھاری گولی ا پر مشتمل ہے، جو ب پر بندھے ایک ڈورے میں آویزاں ہے اور جس میں ف پر ایک کمانیدار ترازو ہے۔ا پر ایک دُوسرا ڈورا بندھا ہے جس کو اُفقاً ی تک لاکر باندھ دیا گیا ہے ۔ د پر کمانیدار ترازو سے کھینچ کا بآسانی اندازہ ہوسکتا ہے۔ جب ا انتصابی سمت ب س سے تدریجاً بڑھتے فاصلے لا پر ہو تو ہر دو کمانیدار ترازو ف اور د میں کھینچ ت اور پ کی قیمتیں دیکھ لو ۔ ذیل کے طریقہ پر حسابات سے اِن کی تصدیق کر لو اور پ اور لا کی ترسیم کرو۔



شکل ۹۵۔ رقاص کا تجربہ

چونکہ پ، و اور ت علی الترتیب اُفقی، انتصابی اور ا ب کی سمت میں ہیں اس لئے ا ب س، ان کے لئے قوتوں کا مثلث ہے، پس

$$\frac{\text{پ}}{\text{و}} = \frac{\text{س ا}}{\text{ب س}} = \frac{\text{لا}}{\text{ح}} \qquad [\text{شکل ۹۵ (ب)}]$$

$$\therefore \text{پ} = \frac{\text{لا}}{\text{ح}}\,\text{و} = \text{و مس ع} \quad - - - - - \; (۱)$$

نیز،

$$\frac{\text{ت}}{\text{و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب س}} = \frac{\text{ل}}{\text{ح}}$$

$$\text{ت} = \frac{\text{ل}}{\text{ح}}\,\text{و} = \text{و قط ع} \quad - - - - - \; (۲)$$

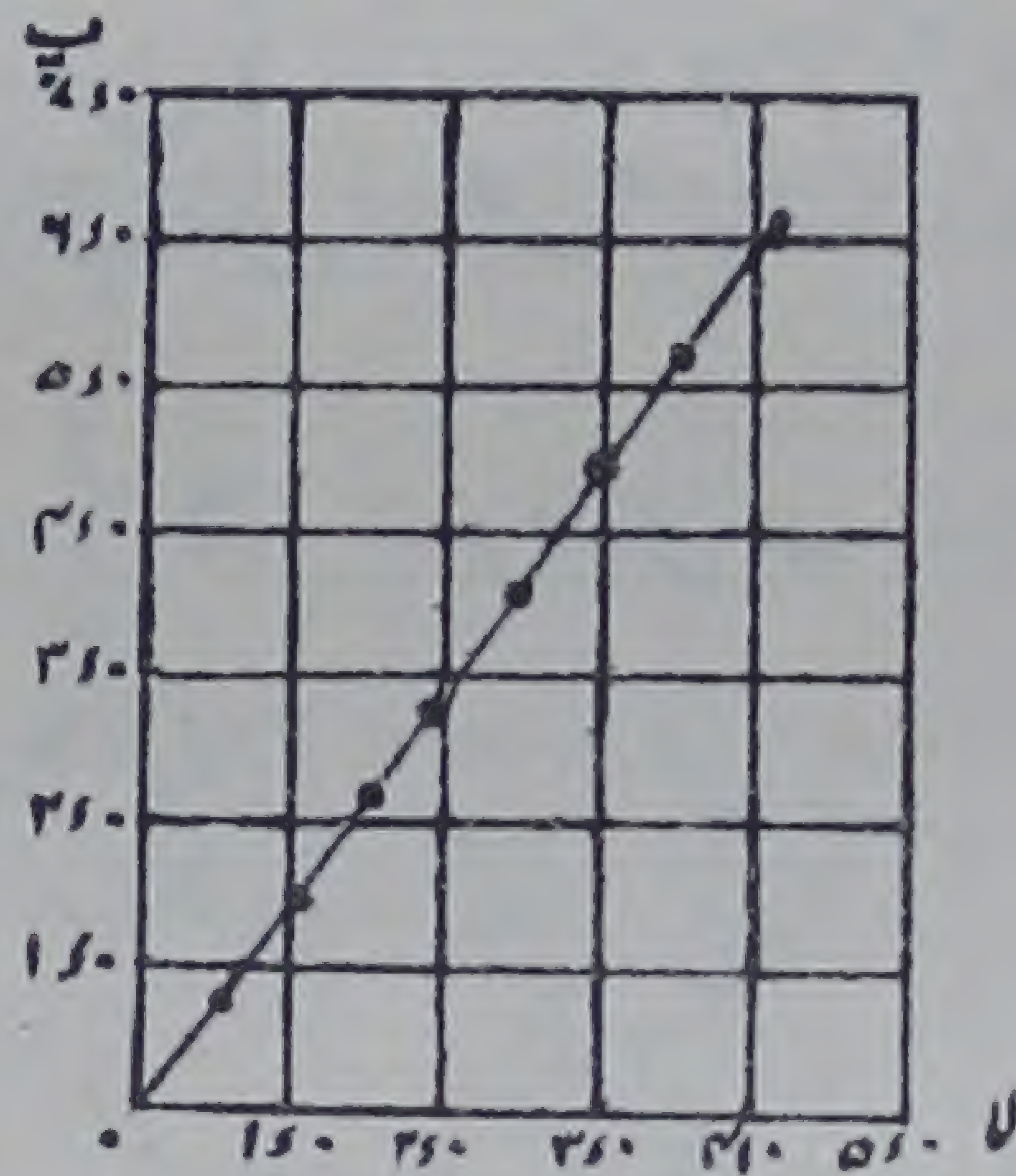
گولی کی ہر وضع کے لئے ل اور نیز لا اور ح کی پیمائش کرو۔ اور (۱) اور (۲) میں ضروری مقداروں کو درج کرکے پ اور ت کی قیمتیں دریافت کرو۔

جدول اِس طرح بناؤ:۔

گولی کا وزن کلوگرام = و =
اب کا طول سمر میں = ل =

لا سمر	ح سمر	حساب کردہ قیمتیں کلوگرام میں		کمانیدار ترازوؤں سے مشاہدہ کردہ قیمتیں کلوگرام میں	
		پ = $\frac{لا}{ح}$ و	ت = $\frac{ل}{ح}$ و	پ	ت

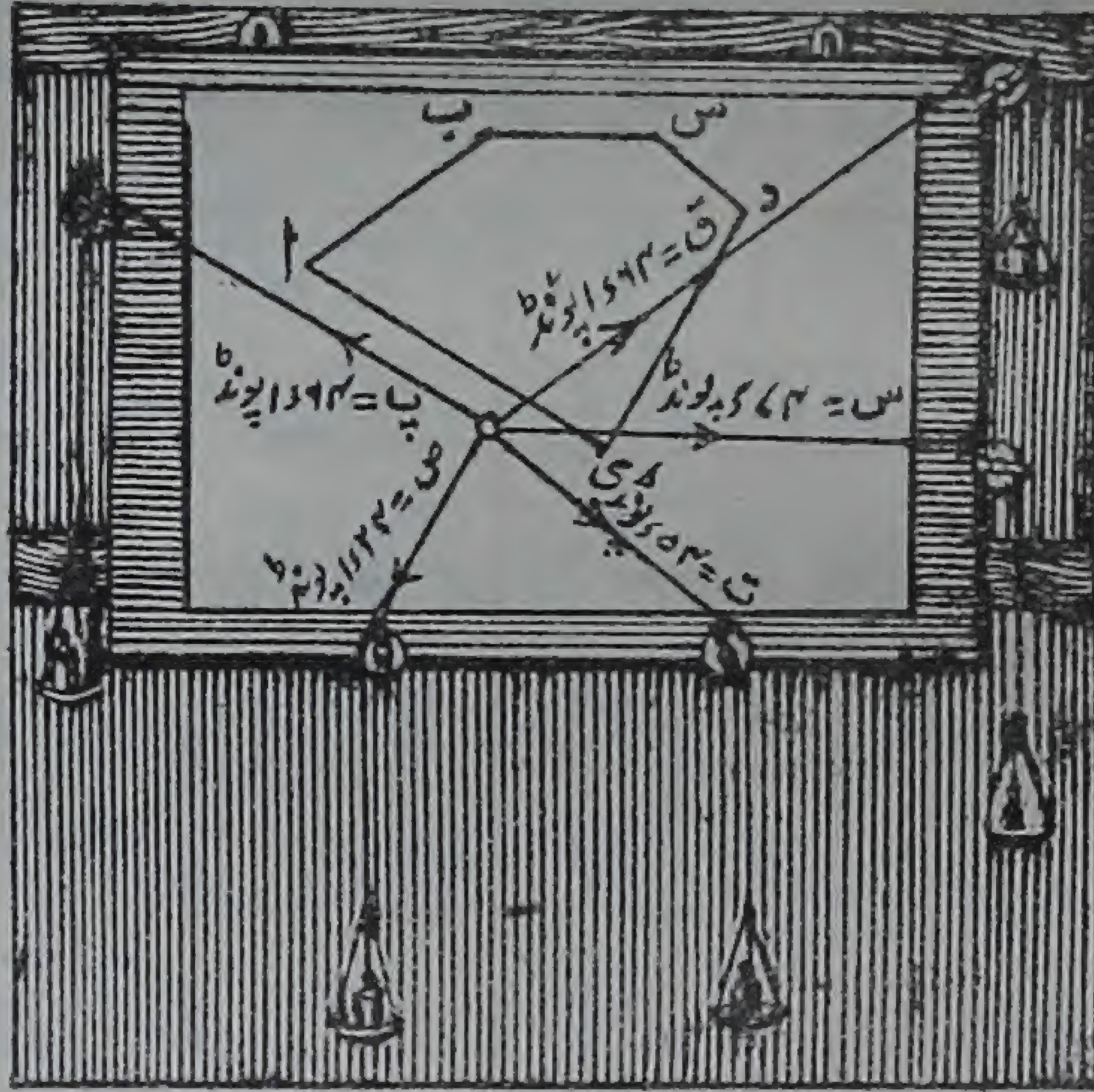
جو منحنی حاصل ہوگا وہ شکل ۹۶ کے منحنی کے مشابہ ہوگا۔ غور کرو کہ لا کی نسبتاً کم قیمتوں کے لئے وہ کس قدر مستقیم کے قریب ہے۔



شکل ۹۶ ۔ رقاص کے لئے پ اور لا کی ترسیم

تجربہ ۱۵ :- قوتوں کا کثیر الاضلاع ــ شکل ۹۷ میں قوتوں کے کثیر الاضلاع سے متعلق ایک مکمل تجربے کے نتائج ظاہر کئے گئے ہیں ۔ آلہ اور طریقہ دونوں تجربہ ۱۳ [صفحہ ۱۴۱] کے مطابق ہیں۔ چار قوتیں

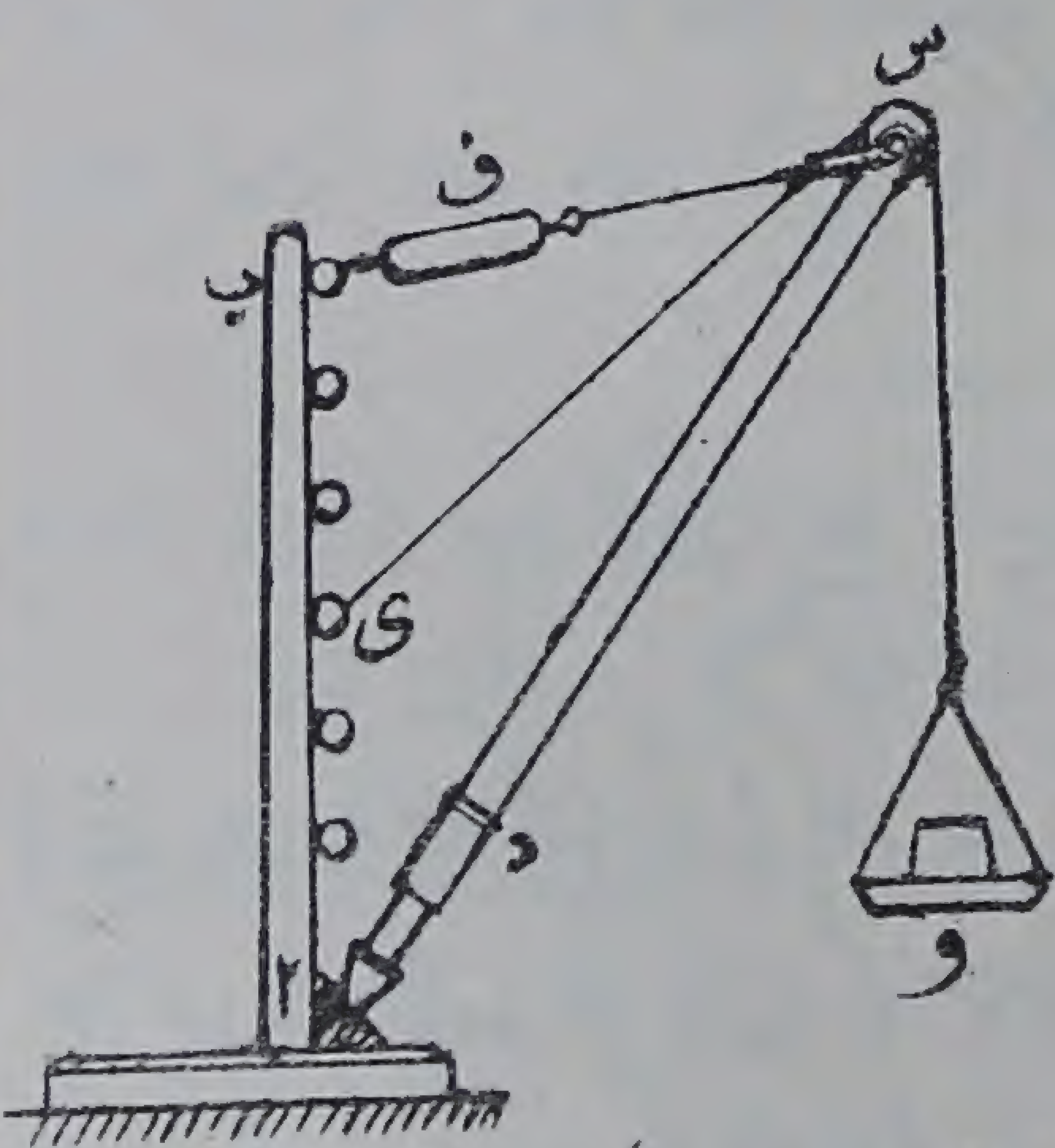
مانی گئی ہیں اور کثیرالاضلاع ا ب س د ی ا کے آخری ضلع کو کھینچکر موازن



شکل ۹۷ - قوتوں کے کثیرالاضلاع پر ایک تجربہ

حاصل کیا گیا ہے - موازن کے عمل کرنے پر میخ کو بغیر چھلے کے حرکت کئے ہوئے نکالا جا سکتا ہے -

تجربہ ۱۶ ب - ڈیرک[1] حمالہ :- ڈیرک حمالہ کا ایک نمونہ شکل ۹۸ میں دکھلایا گیا ہے - اِس میں ایک لاٹ ا ب ہے جو مضبوطی کے ساتھ ایک تختے پر نصب ہے جو خود ایک میز پر کسا ہُوا ہے - ایک بازو ا س میں ا نوکدار ہے جو ایک پیالہ نما جوفے پر قائم ہے - س پر ایک چرخی ہے اور د پر ایک پچک کی کمانیدار ترازُو ہے - بازُو کو سنبھالنے کے لئے ایک بند ب س ہے جس کو گھٹا بڑھا سکتے ہیں - اِس کی کھینچ کی پیمائش کرنے کے لئے



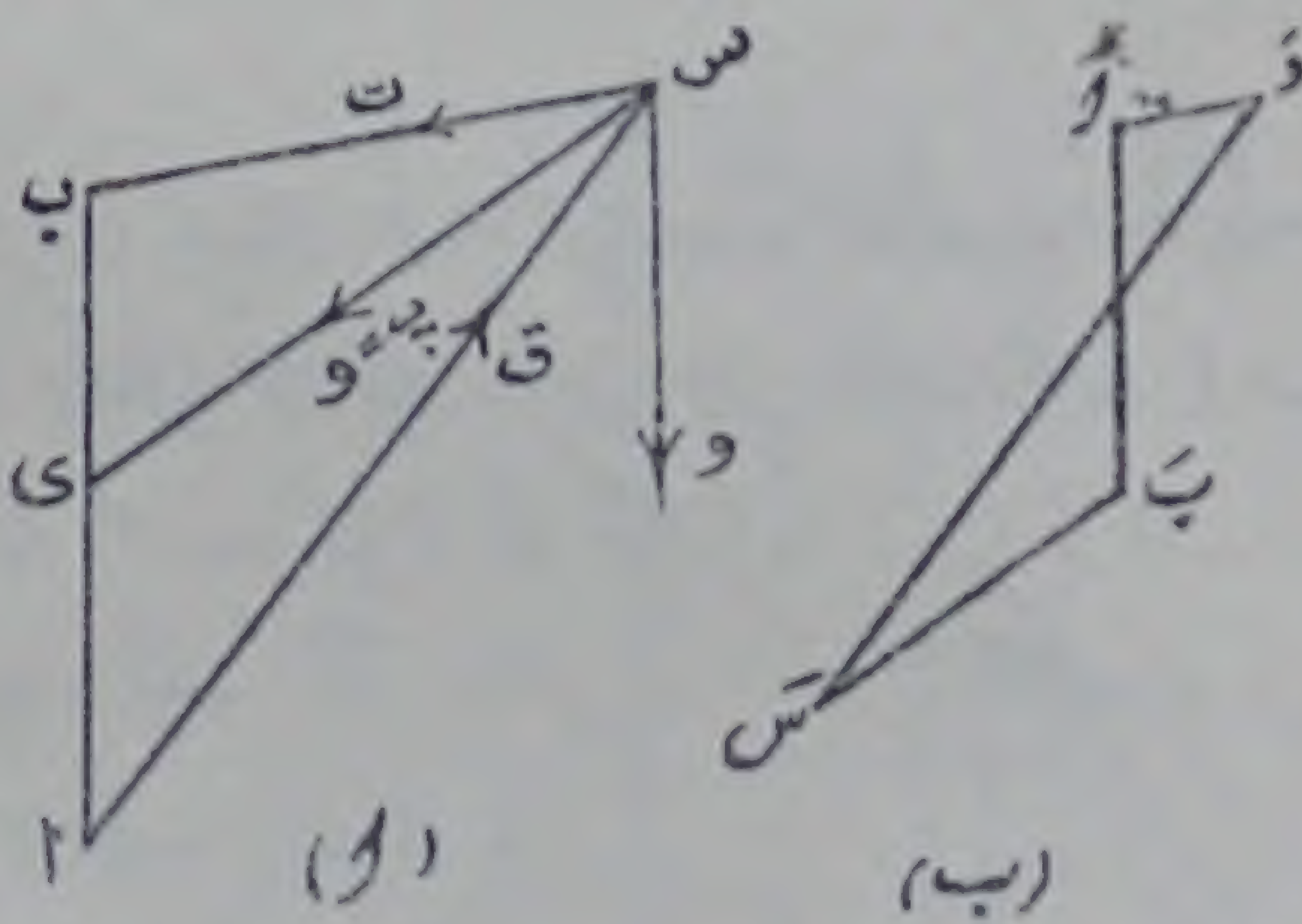
شکل ۹۸ - ڈیرک حمالہ کا نمونہ

[1] Derrick

ایک کمانیدار ترازو ف پر داخل کر دی گئی ہے۔ وزن کو ایک ڈورا سنبھالتا ہے جو چرخی س پر سے گزرتا ہے اور لاٹ پر بنے ہوئے پیچ کے ناکوں میں سے ایک ناکے پر بندھا ہے۔ بازو کا میلان ب س کے طول کو گھٹانے بڑھانے سے بدلا جا سکتا ہے، ی س اور ب س کے میلانوں کو بدلنے کے لئے مختلف پیچ ناکوں کو استعمال کیا جاتا ہے۔

و کی مختلف قیمتوں اور آے کی مختلف جسامتوں کے لئے بازو میں ڈھکیل اور بندش میں کھنیچ دریافت کرنے کے لئے کمانیدار ترازوؤں کو دیکھو۔ اور حسب ذیل طریقہ سے قوتوں کا کثیر الاضلاع کھینچکر ان نتائج کی تصدیق کرو:-

پہلے اب، ب س، اس، اور ای کے ابعاد کو پیمائش کر لو اور پھر حالہ کا خاکا بنا لو [شکل ۹۹ (ا)]۔ یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ س پر کی چرخی محض ڈورے کی سمت بدل دیتی ہے لیکن اس کی قوت میں کوئی تبدیلی نہیں پیدا کرتی۔ پس پ = و [شکل ۹۹ (ا)]۔ قوتوں کا متوازی الاضلاع اس طرح بنتا ہے کہ



شکل ۹۹۔ ڈیرک حالہ میں قوتیں

اب سے و ظاہر کیا جائے اور بَ سَ سے پ۔ اَ سے ایک خط ت کے متوازی، اور سَ سے ایک خط ق کے متوازی کھینچا جاتا ہے، یہ دونوں دَ پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ق اور ت کو علی الترتیب سَ دَ اور دَ اَ پر حسب پیمانہ بنا سکتے ہیں۔

ق اور ت کی قیمتیں جو اس طرح حاصل ہونگی وہ کمانیدار ترازوؤں

کی قیمتوں کے بالکل مطابق نہ ہونگی۔ اِس کا سبب یہ ہے کہ آلے کے حصّوں کا وزن شمار میں نہیں لیا گیا ہے۔ ۹ کو پلڑے میں سے نکال کر کمانیدار ترازوؤں کو پڑھنے سے ترازو والی قیمتوں میں ایک تقریبی تصحیح کی جا سکتی ہے۔ اِس سے بازو اور بند میں حِصّوں کے وزن کی وجہ سے پیدا شدہ قوتیں معلوم ہو جائینگی، اِن کو اول کی قیمتوں سے منہا کر دینا چاہیئے۔ تو اِس وقت قوتوں کے کثیر الاضلاع سے حاصل شدہ قیمتوں سے کافی تطابق پایا جائیگا۔

ساتویں فصل کی مشقیں

(۱) ایک کیل ایک تختے میں ٹھونک دی گئی ہے، اور اِس سے دو ڈورے باندھ دیے گئے ہیں۔ اگر ڈوروں کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہو جب کہ دونوں ڈورے تختے کے متوازی ہوں اور اگر ایک ڈورا ۴ پونڈ وزن کی مساوی قوت سے کھینچا جائے اور دُوسرا ۸ پونڈ وزن کی قوت سے، تو عمل کے ذریعہ سے کیل پر حاصلِ قوت دریافت کرو۔

(۲) اگر پہلے سوال میں پہلے ڈورے کے بجائے ایک سلاخ رکھ دی جائے اور ۴ پونڈ وزن کی مساوی قوت سے کھینچی جائے تو کیا جواب ہوگا۔

(۳) ۳ کلو گرام وزن کی ایک قوت کا ایک جزو ۲ کلو گرام ہے، اِس جزو اور قوت کے درمیان زاویہ ۴۰° ہے، تو عمل کے ذریعہ سے دُوسرا جزو دریافت کرو۔

(۴) ۱۰ پونڈ وزن کی ایک قوت کے اجزاء علی الترتیب ۵ پونڈ اور ۷ پونڈ وزن کے ہیں۔ تو عمل کے ذریعہ سے اجزاء کے خطوطِ عمل دریافت کرو۔

(۵) ۶ پونڈ وزن کی ایک کھینچ اور ایک مجہول قیمت کی قوت ق ایک نقطہ پر عمل پیرا ہیں۔ دونوں کے خطوطِ عمل ۹۰° پر ہیں۔ ۸ پونڈ وزن کی ایک قوت اِن دونوں کو تھام لیتی ہے۔ ق کی مقدار حساب کرکے معلوم کرو۔

اور ق اور ۸ پونڈ وزن والی قوت کے درمیان زاویہ بھی معلوم کرو۔

(۶) اگر ق اور ۶ پونڈ وزن والی قوت ایک دوسرے سے °۶۰ پر ہوں تو سوال نمبر ۵ کا کیا جواب ہوگا۔

(۷) ۱۰ پونڈ وزن کی دو کھینچیں ایک نقطے پر عمل کرتی ہیں۔ تو حساب سے موازن کی قیمت دریافت کرو جب کہ دونوں کھینچوں میں °۱۶۵، °۱۷۰، °۱۷۴، °۱۷۸، °۱۸۰ کے زاویئے ہوں۔ کھینچوں کے درمیانی زاویئے اور موازن کی قدر کا علاقہ ظاہر کرنے کے لئے ایک منحنی ترسیم کرو۔

(۸) ۲ پونڈ وزن کے ایک ذرّے کو ایک قوت پ اُفقی سے °۴۵ پر ایک چکنے مستوی پر بہ حالتِ سکون قائم رکھتی ہے تو پ کی قدر معلوم کرو جب کہ (ا) وہ مستوی کے متوازی ہو (ب) اُفقاً (س) مستوی سے °۲۰ پر کھینچتی ہو (د) مستوی سے °۳۰ پر دباتی ہو۔ ہر صورت میں مستوی کا ردِّ عمل ر بھی دریافت کرو۔

(۹) اُفقی سے °۲۵ پر مائل ایک چکنے مستوی پر ک پونڈ کمیت کا ایک ذرّہ پھسلتا ہے تو اسراع پیدا کرنے والی حاصل قوت دریافت کرو۔ اِس طرح اِسراع دریافت کرو اور سکون سے ۸ فٹ کا فاصلہ طے کرنے کے لئے وقت بھی دریافت کرو۔

(۱۰) $\frac{1}{4}$۳ فٹ اور $\frac{3}{4}$۳ فٹ طول کے دو ڈورے ۸ پونڈ وزن والے ایک جسم کے کسی نقطے پر بندھے ہیں۔ اِن کے آزاد سرے اِسی اُفقی خط پر $\frac{1}{2}$۳ فٹ کے فصل سے دو نقطوں پر بندھے ہیں۔ تو ہر ڈورے کا تناؤ دریافت کرو۔ جامعۂ لندن

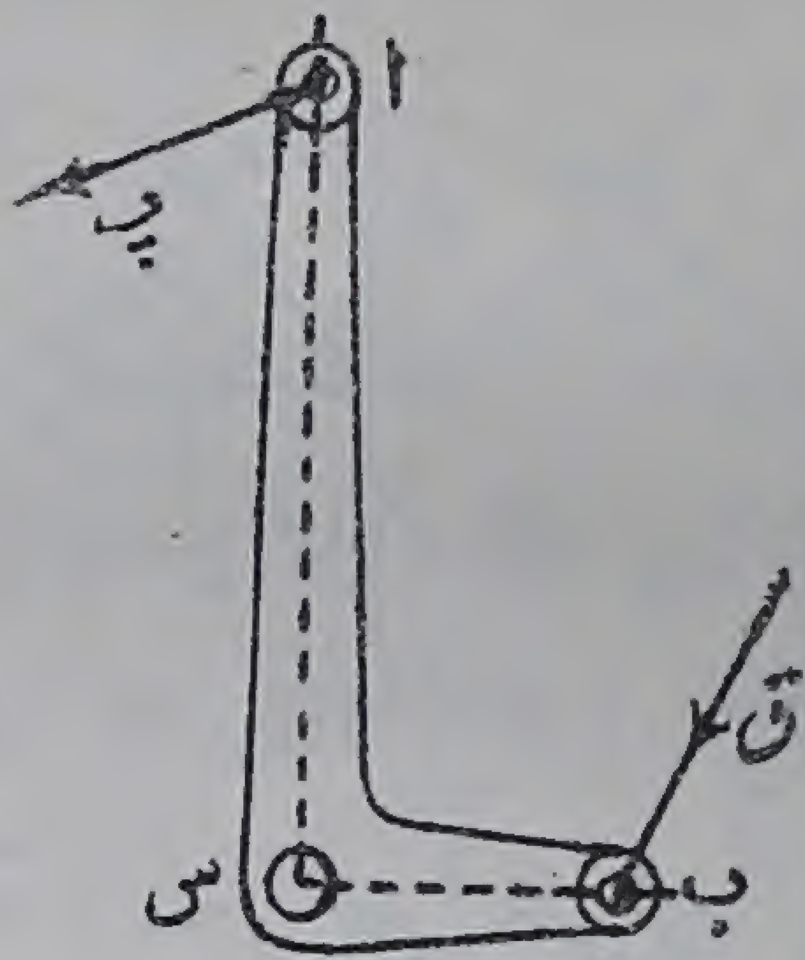
(۱۱) ۲۲۰ فٹ لمبے ڈورے کے سرے پر اور ۱۰۰ فٹ کی انتصابی بلندی پر ۲ پونڈ کمیت والا ایک پتنگ اُڑ رہا ہے۔ اگر ڈورے کا تناؤ $\frac{1}{2}$۱ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے تو ترسیماً پتنگ پر ہوا کی قوت کی قدر اور سمت دریافت کرو۔ [جامعۂ عثمانیہ]

(۱۲) تین قوتیں پ، ق، ر بھی توازن میں ہیں۔ پ = ق اور

ی = ۲۵ء۱پ تو پ اور ق کی سمتوں میں زاویہ معلوم کرو۔ اگر
پ = ق = ی تو جواب کیا ہوگا۔

(۱۳) ایک رسی دو نقطوں ا اور ب پر بندھی ہے اور اُس پر ۵۰ پونڈ کا وزن ہے جو اِس پر بآسانی پھسل سکتا ہے۔ ا پر اُفقی اور انتصابی محوروں کے لحاظ سے ب کے محدد ۸ فُٹ اور ۲ء۱ فُٹ ہیں۔ اور اِسی کا طول ۱۰ فُٹ ہے۔ تو ترسیماً توازن کی وضع اور رسی کا تناؤ دریافت کرو۔ جامعۂ لندن

(۱۴) شکل ۱۰۰ میں ایک خمیدہ بیرم ا ب س دکھایا گیا ہے جو س پر ایک چول پر قائم ہے۔ بازو س ا اور س ب ۹۰° پر ہیں اور علی الترتیب ۵ اً اور ۲ اً ہیں اُفقی سے ۱۵° پر ایک قوت پ، ا پر عمل کرتی ہے، اور ایک دُوسری قوت ق انتصابی سے ۲۰° پر ب پر عمل کرتی ہے تو ق کی قدر دریافت کرو اور پ اور ق کو تولنے کے لئے س پر مطلوبہ ردِّ عمل کی قدر اور سمت دریافت کرو۔ بیرم کے وزن کو نظر انداز کردو۔



شکل ۱۰۰

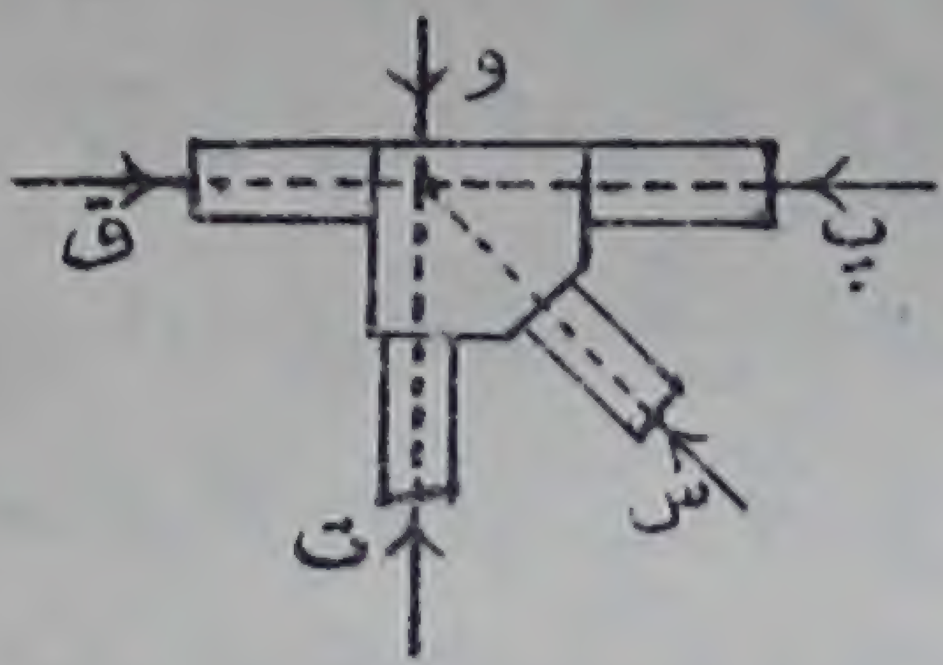
(۱۵) پھانسی کی دو چوبیں ا ب اور ا س ایک انتصابی مستوی میں ہموار زمین پر قائم ہیں۔ اِن کے سرے ا پر وصل ہیں۔ ا ب، ۲۰ فُٹ ہے، ا س ۱۵ فُٹ اور ب س ۱۵ فُٹ ہے۔ تو ہر چوب پر دباؤ معلوم کرو جب کہ ا سے ۱ ٹن کا وزن لٹکایا جائے۔

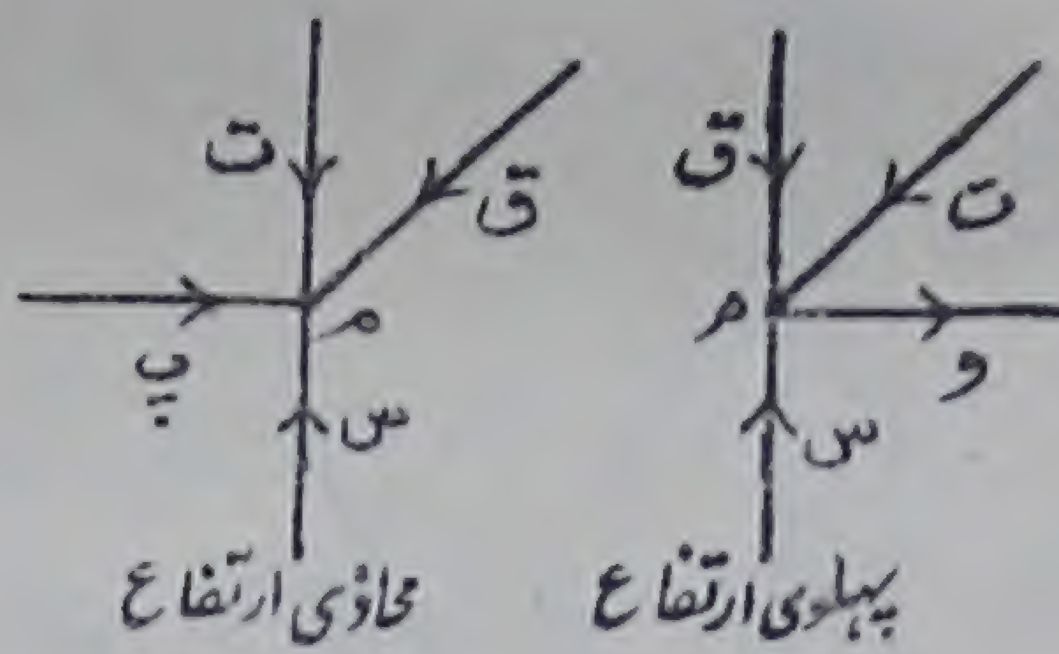
(۱۶) ایک ڈیرک حمالہ کا بازو ۱۹ فُٹ ہے، بندش ۱۰½ فُٹ ہے، اور لاٹ ۹ فٹ لمبی ہے۔ ۲ء۵ ٹن وزن کا ایک بوجھ ایک زنجیر میں لگا ہے جو بازو کے سرے پر ایک چرخی پر سے گزرتی ہے اور پھر بندش پر۔ تو بازو پر ڈھکیل اور بندش کی کھینچ معلوم کرو۔ رگڑ اور حمالہ کے مختلف حصّوں کے وزن کو

نظر انداز کر دو۔

(۱۷) سوال ۱۶ میں اگر زنجیر بازو کے سِرے پر والی چرخی سے گذرنے کے بعد بازو ہی پر گزرے تو کیا جواب ہوگا۔

(۱۸) چار بوجھ دار سلاخیں ایک جوڑ پر ملتی ہیں جیسا کہ شکل ۱۰۱ میں دکھلایا گیا ہے۔ پ اور ق ایک ہی اُفقی خط میں ہیں۔ ت اور و ایک ہی انتصابی میں ہیں۔ پ سے س ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر پ = ۱۵ ٹن وزن، و = ۱۲ ٹن وزن اور س = ۶ ٹن وزن تو ق اور ت دریافت کرو۔





شکل ۱۰۱

شکل ۱۰۲

(۱۹) ایک مسدس کے مرکز م سے ہر کونے ا، ب، س، د، ی، ف تک خطوط کھینچے جاتے ہیں۔ اِن خطوط پر قوتیں اِس طرح عمل کرتی ہیں:۔ م سے ا کی طرف ۶ پونڈ وزن، ب سے م کی طرف ۲ پونڈ وزن، س سے م کی طرف ۸ پونڈ وزن، م سے د کی طرف ۱۲ پونڈ وزن، ی سے م کی طرف ۷ پونڈ وزن، ف سے م کی طرف ۳ پونڈ وزن، تو حاصل دریافت کرو۔

(۲۰) شکل ۱۰۲ میں م پر قوتیں توازن میں ہیں اور اِس طرح عمل کرتی ہیں:۔ محاذی ارتفاع میں پ، ق، اور س کاغذ کے مستوی میں ہیں اور ت کاغذ کے مستوی سے ۴۵° پر ہے، س سے ق ۱۳۵° کا زاویہ بناتا ہے۔ پہلوی ارتفاع میں ت اور و کاغذ کے مستوی میں ہیں۔

پ، ق اور س والے مستوی پر و عمود ہے اور و سے ت ۵۰° بناتا ہے اگر ق = ۴۰ ٹن وزن، ت = ۲۵ ٹن وزن تو پ، س اور و دریافت کرو۔

(۲۱) قوتوں کے کثیر الاضلاع کا مسئلہ بیان کرو اور اس کو ثابت کرو۔ م ا، م ب، م س، م د، م ی پانچ سلاخیں ہیں جو ایک ہی مستوی میں ہیں اور م پر ملتی ہیں۔ زاویئے ا م ب، ب م س، س م د، د م ی تیس تیس درجے کے ہیں۔ سلاخوں پر م سے دُور علی الترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ٹن کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ جوڑ م کو دو اَور سلاخیں توازن میں رکھتی ہیں جو م ا اور م د کے مخالف سمتوں میں کھینچتی ہیں۔ ان ہر دو سلاخوں پر کھینچ معلوم کرو۔ [جامعۂ ادیلاؤ]

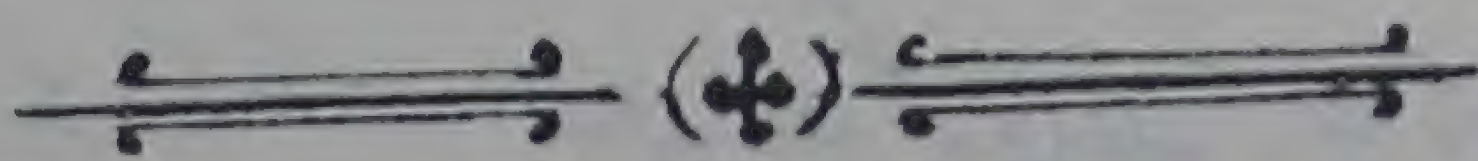
(۲۲) و وزن کے ایک ذرّے کو ایک چکنے مستوی مائل پر [زاویۂ میلان = ہ] مستوی کے متوازی ایک قوت توازن میں رکھتی ہے۔ اِس قوت کی قدر دریافت کرو۔ اگر ذرّے کو توازن میں رکھنے والی تین قوتیں پ، ق، ر ہوں جو مستوی کے متوازی سب سے زیادہ ڈھال والے خط سے زاویئے ع، ب، سہ، پر ہیں تو پ، ق، ر، و ع، ب، سہ، ہ، میں جملہ علاقے دریافت کرو۔ [جامعۂ عثمانیہ]

(۲۳) قوتوں کا کثیر الاضلاع بیان کرو۔ اور بتلاؤ کہ ایک ہی نقطے پر ملنے والی متعدد قوتوں کا حاصل اس کے ذریعے سے کیونکر معلوم کیا جا سکتا ہے۔ نیز حاصل کے دریافت کرنے کے اُس قاعدے کی بھی تشریح کرو جس میں دو علی القوائم سمتوں میں قوتوں کے اجزائے تحلیلی لئے جاتے ہیں۔ [جامعۂ بمبئی]

(۲۴) ۱۲ فُٹ لمبے ایک ڈورے پر ایک ایک فٹ کے فاصلے سے ۱۱ گرہیں ہیں۔ ڈورے کے سرے ایک ہی افقی خط میں ۹ فُٹ کے فاصلے سے دو سہاروں ا اور ب سے بندھے ہیں۔ ہر گرہ سے باری باری ۴ پونڈ وزن کا ایک بوجھ لٹکایا جاتا ہے۔ ا سے ملحق ڈورے

کے حصے میں ہر حالت میں تناؤ معلوم کرو۔ اِن تناؤں کو بطور معین ترسیم کرو اور ۱ سے بوجھ کے افقی فاصلوں کو فصلے قرار دو۔

(۲۵) ایک عمارت ۴۰ فٹ لمبی اور ۲۰ فٹ چوڑی ہے۔ خاکے میں چھت کا پشتہ لمبے ضلعوں کے متوازی ہے اور چھوٹے ضلعوں کی تنصیف کرتا ہے۔ چھت کی اولتی سے پشتہ ۵ فٹ اونچا ہے۔ چھت کے ایک بازو پر ہوا ۴۰ پونڈ وزن فی مربع فٹ کا ایک عمودی دباؤ ڈالتی ہے۔ تو اِس بازو پر ہوا کی مجموعی قوت کے اُفقی اور انتصابی اجزاء دریافت کرو۔



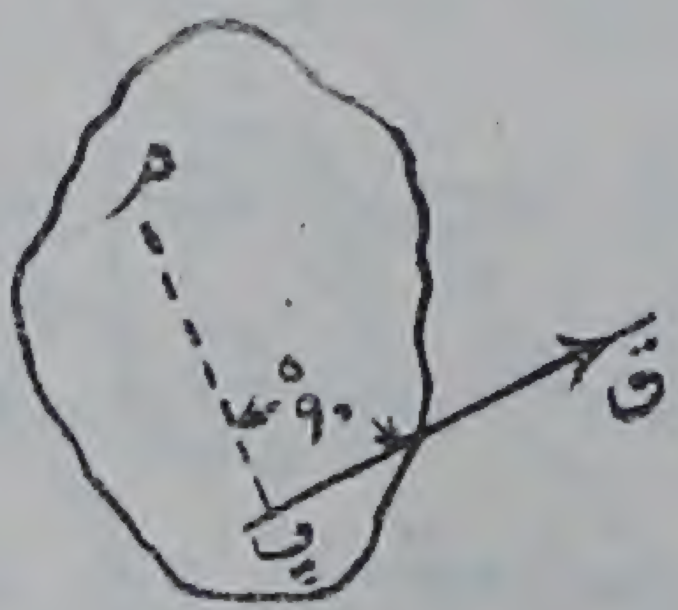
آٹھویں فصل

معیارِ اثر۔ متوازی قوتیں

قوت کا معیارِ اثر:۔ قوت کے معیارِ اثر سے مراد قوت کا وہ اقتضاء ہے جس سے وہ اپنے زیرِ عمل جسم کو گھمانا چاہتی ہے۔ اور اُس کا اندازہ قوت کی مقدار، اور محورِ گردش سے خطِ قوت پر کے عمود کے طول، کے حاصلِ ضرب سے ہوتا ہے۔ چنانچہ شکل ۱۰۳ میں ایک جسم دکھلایا گیا ہے جو م سے گزرنے والے، اور کاغذ کے مستوی کے علی القوائم، ایک محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ کاغذ کے مستوی میں ایک قوت ق عمل پیرا ہے اور اس کے معیارِ اثر کا اندازہ حسبِ ذیل ہے:۔

ق کا معیارِ اثر = ق × م پ

جہاں م پ، م سے ق کے علی القوائم کھینچا گیا ہے۔



شکل ۱۰۳ قوت کا معیارِ اثر

اثری معیاروں میں، اُن کے حساب میں استعمال کردہ قوت اور طول دونوں کی اکائیاں شامل ہوتی ہیں۔ س۔گ۔ث نظام میں معیارِ اثر ڈائن سنتی میٹروں، یا گرام وزن سنتی میٹروں میں پیمائش کئے جاتے ہیں۔ انگریزی نظام میں پونڈل فٹ، یا پونڈ وزن فٹ زیادہ مستعمل ہیں۔

قوت کے معیارِ اثر کے ابعاد قوت اور طول کے ابعاد کا حاصلِ ضرب

لینے سے حاصل ہوتے ہیں اس طرح کہ

قوت کے معیارِ اثر کے ابعاد = $\frac{ک\ ط}{و^2} \times ط = \frac{ک\ ط^2}{و^2}$

قوت کے عمل سے گردش کی جو سمت پیدا ہو اُس کے لحاظ سے قوت کے معیارِ اثر کی جہت موافق سمت ساعت یا مخالف سمت ساعت کہی جاتی ہے۔ حساب کرنے میں سہولت اِس میں ہوتی ہے کہ ایک جہت والے اثری معیاروں کو مثبت گردانا جائے تو اِس کے خلاف جہت والوں کو منفی۔

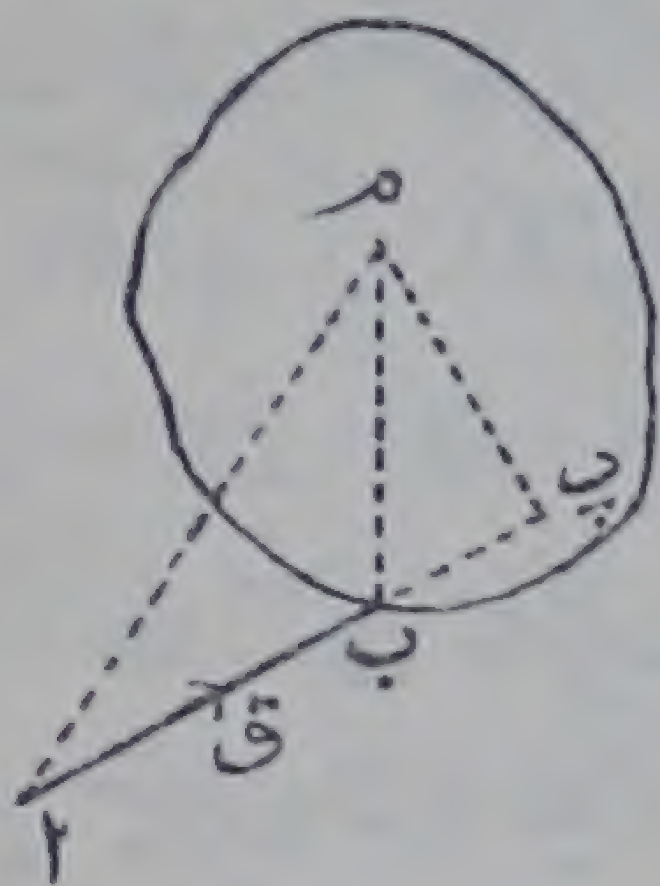
ظاہر ہے کہ اگر کوئی قوت گردش کے محور میں سے گزرے تو اِس کے عمل سے کوئی گردش نہیں پیدا ہو سکتی۔ ایسی قوت کا معیارِ اثر بھی نہیں ہوتا۔

معیارِ اثر کی تعبیر:۔ شکل ۱۰۴ میں ایک جسم دکھلایا گیا ہے جو م کے گرد گھومنے کے لئے آزاد ہے اور جس پر ایک قوت ق عمل کرتی ہے جو اب سے ظاہر کی گئی ہے۔ اب پر م پ عمود کھینچو اور اب کو ضرورت ہو تو بڑھا لو۔ م ا اور م ب کو ملاؤ۔ تو

ق کا معیارِ اثر = ق × م پ = ا ب × م پ

= ۲ △ م ا ب،

پس قوت کو ظاہر کرنے والے خط کے دونوں سروں کو نقطۂ گردش سے ملانے پر جو مثلث حاصل ہو اُس کے دونے رقبے کو ہم قوت کے معیارِ اثر کا اندازہ قرار دے سکتے ہیں۔

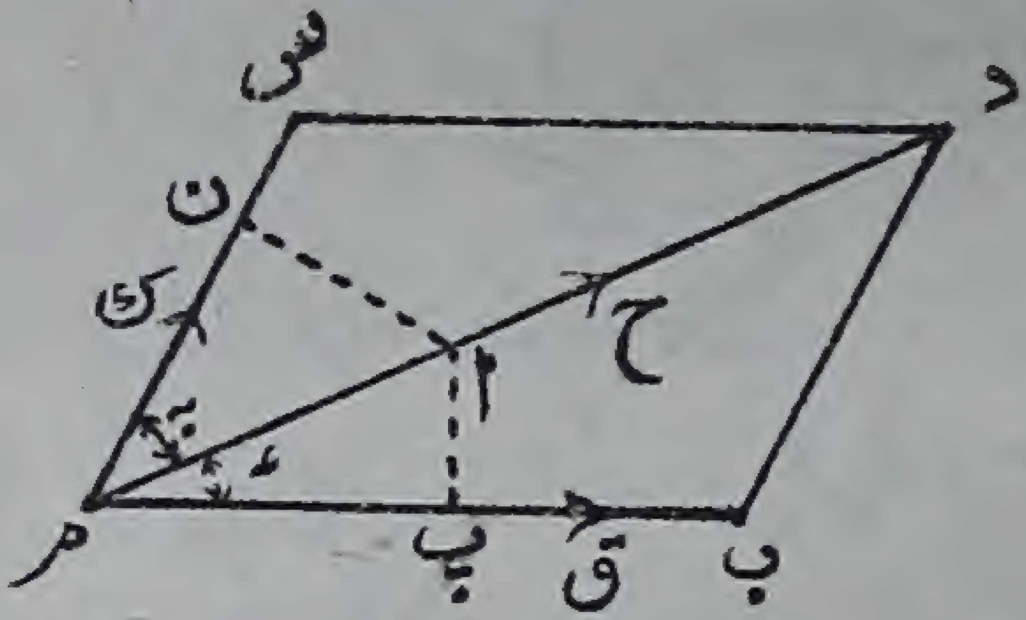


شکل ۱۰۴۔ معیارِ اثر کی تعبیر

حاصل کے خط پر کسی نقطے کے گرد قوت کے اجزاء کے معیارِ اثر مساوی اور مخالف ہوتے ہیں:۔

شکل ۱۰۵ میں ح نقطۂ

م پر عمل کرتا ہے اور اُس کے اجزاء ق اور ک ہیں جو قوتوں کے متوازی الاضلاع م ب د س سے حاصل ہوتے ہیں۔ ح کے خط پر ا ایک نقطہ ہے، اور ق اور ک پر علی الترتیب ا پ اور ا ن، عمود ہیں۔ ح اور ق، اور ح اور ک کے درمیان زاویے عہ اور بہ ہیں۔



شکل ۱۰۵۔ ق اور ک کے معیارِ اثر

$$\frac{\text{ق کا معیارِ اثر}}{\text{ک کا معیارِ اثر}} = \frac{\text{ق} \times \text{ا پ}}{\text{ک} \times \text{ا ن}} = \frac{\text{ق} \times \text{م ا جب عہ}}{\text{ک} \times \text{م ا جب بہ}}$$

$$= \frac{\text{ق جب عہ}}{\text{ک جب بہ}}$$

نیز

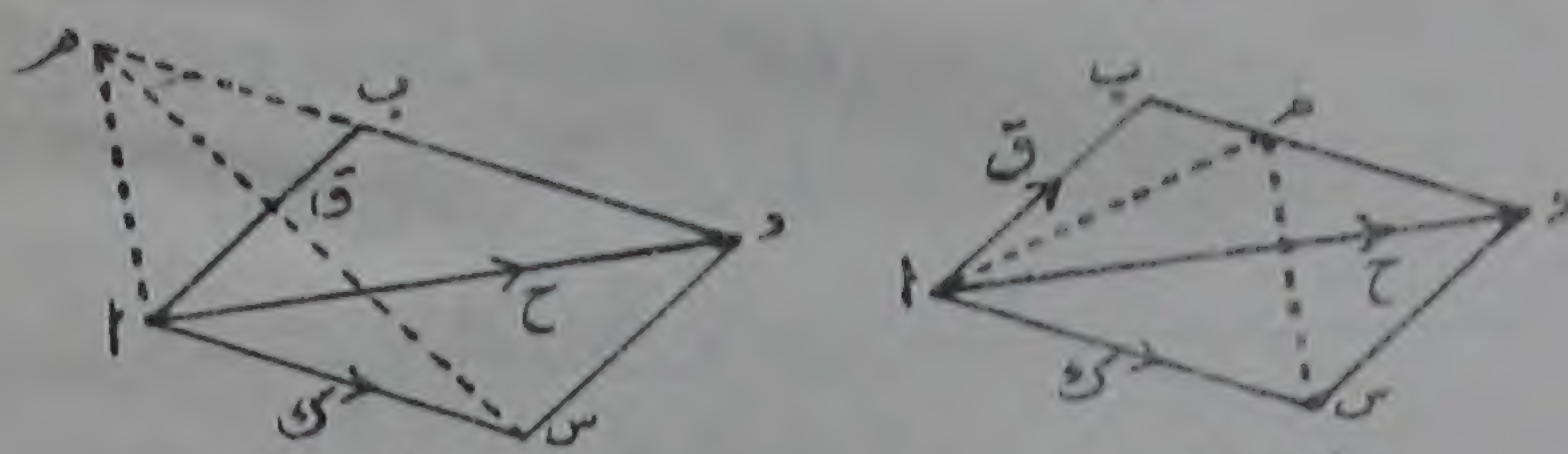
$$\frac{\text{ق}}{\text{ک}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م س}} = \frac{\text{م ب}}{\text{ب د}} = \frac{\text{جب بہ}}{\text{جب عہ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ق کا معیارِ اثر}}{\text{ک کا معیارِ اثر}} = \frac{\text{جب بہ جب عہ}}{\text{جب عہ جب بہ}} = 1$$

$\therefore$ ق کا معیارِ اثر = ک کا معیارِ اثر

کسی نقطے کے گرد کسی قوت کا معیارِ اثر اپنے اجزاء کے اثری معیاروں کے جبری مجموعہ کے مساوی ہے:۔

اِس میں دو صورتیں ہوتی ہیں۔ ایک تو وہ جس میں نقطہ اِس طرح لیا جائے کہ اجزاء کے معیارِ اثر ایک ہی جہت کے ہوں [شکل ۱۰۶ (ا)]، دُوسری صورت میں شکل [۱۰۶ (ب)] اجزاء کے معیارِ اثر مختلف الجہت ہوں۔



شکل ۱۰۶ - ق، ک اور ح کے معیارِ اثر م کے گرد

ہر شکل میں فرض کرو کہ ح دی ہوئی قوت ہے اور م نقطۂ گروش ہے۔ فرض کرو کہ اجزا ر ق اور ک ہیں۔ ک کے متوازی م ب د کھینچو جو ق اور ح کو علی الترتیب ب اور د میں قطع کرے۔ متوازی الاضلاع ا ب د س کو مکمل کرو۔ تو

ق : ک : ح = ا ب : ا س : ا د

م ا اور م س کو ملاؤ۔ تو شکل ۱۰۶ (ا) میں

△ م ا ب + △ ا ب د = △ م ا د

نیز △ ا ب د = △ ا س د = △ م ا س

∴ △ م ا ب + △ م ا س = △ م ا د

یا ق کا معیارِ اثر + ک کا معیارِ اثر = ح کا معیارِ اثر [صفحہ ۱۵۵]

شکل ۱۰۶ (ب) میں

△ م ا ب + △ م ا د = △ ا ب د

نیز △ ا ب د = △ ا س د = △ م ا س

∴ △ م ا ب + △ م ا د = △ م ا س

یا △ م ا د = △ م ا س - △ م ا ب

یا ح کا معیارِ اثر = ک کا معیارِ اثر - ق کا معیارِ اثر

پس معیارِ اثر لیتے وقت اگر ہم اجزا کے بجائے حاصل اور حاصل کے بجائے اجزا رکھیں تو جسم پر جو اثر تھا اُس میں کوئی تبدیلی نہ ہوگی۔

اثری معیاروں کا اصول :- فرض کرو کہ ایک ہی

مستوی میں متعدد قوتیں ایک جسم پر عمل کرتی ہیں جو ایک ثابت محور کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہے۔ اگر گردش واقع نہ ہو تو موافق سمت ساعت اثری معیاروں کا مجموعہ مخالف سمت ساعت اثری معیاروں کے مجموعے کے مساوی ہوگا۔

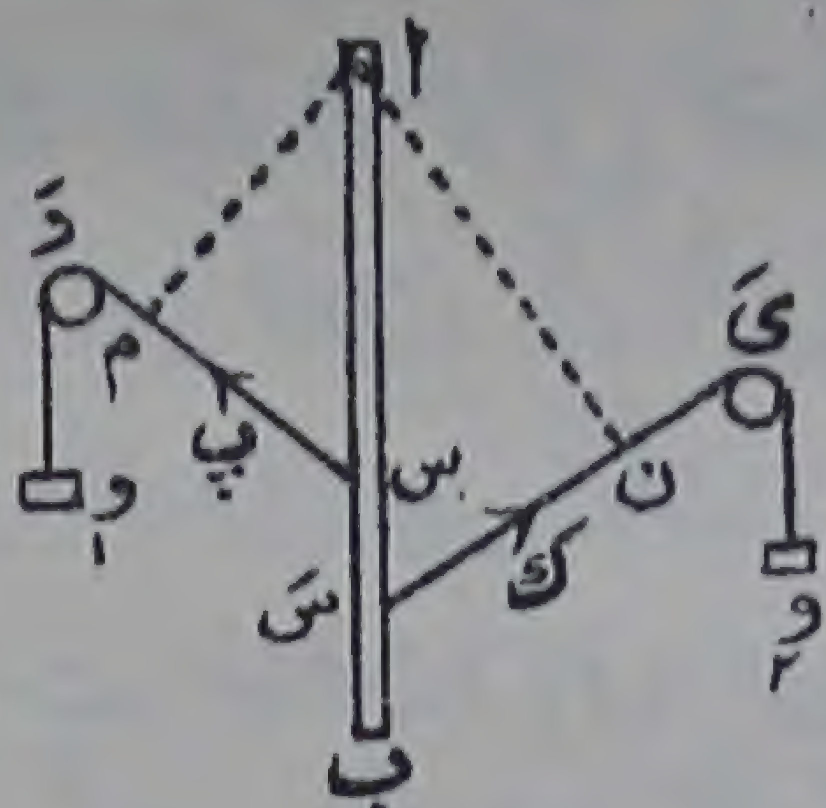
اثری معیاروں کے اس اصول کو سمجھنے کے لئے کوئی ایسی دو قوتیں لے لو کہ دونوں کے معیارِ اثر موافق سمت ساعت ہوں۔ ان قوتوں کے حاصل کا معیارِ اثر ان قوتوں کے اثری معیاروں کے مجموعے کے مساوی ہے۔ اِس حاصل کے ساتھ دی ہوئی قوتوں میں سے ایک اَور قوت لو جس کا معیارِ اثر موافق سمت ساعت ہو۔ ان کا معیارِ اثر پھر اثری معیاروں کے مجموعے کے مساوی ہوگا۔ اِس عمل کو بار بار کرنے سے ایک اکیلی قوت حاصل ہوگی جس کا موافق سمت ساعت معیارِ اثر تمام دیے ہوئے موافق سمت ساعت اثری معیاروں کے مجموعے کے مساوی ہوگا۔

اِسی طریقے پر مخالف سمت ساعت اثری معیار والی قوتوں پر عمل سے ایک منفرد قوت حاصل ہوگی جس کا مخالف سمت ساعت اثری معیار دیے ہوئے مخالف سمت ساعت اثری معیاروں کے مجموعے کے مساوی ہوگا۔ اِن دو آخری قوتوں کے حاصل کا اثری معیار دیے ہوئے موافق سمت ساعت اور مخالف سمت ساعت اثری معیاروں کے مجموعے کے مساوی ہوگا اور اگر یہ مساوی ہوں تو حاصل اثری معیار صفر ہوگا اور کوئی گردش واقع نہ ہوگی۔

تجربہ ۱۷:۔ دو مساوی اور مخالف اثری معیاروں کا توازن۔

شکل ۱۰۷ میں ایک سلاخ اب میں ا پر ایک سوراخ ہے جس میں سے ایک میخ گزرتی ہے جو ایک انتصابی تختہ پر نصب ہے۔ سلاخ اب آزادانہ آویزاں ہے اور ا کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ ب کے قریب کسی سوراخ سے ایک دوسری میخ گزار کر سلاخ کو اس وضع میں ثابت کردو۔ س پر ایک باریک ڈورا لگاؤ اور اس کو چرخی د پر سے گزر کر اس کے سرے میں ایک وزن و باندھ دو اور اِس طرح س پر ایک کھنچ پ = و

لگاؤ۔ ا سے پ عمود ا م گرا کر اس کی پیمائش کرو۔ اور حساب سے پ کا اثری معیار = پ × ا م دریافت کرو۔ سَ پر ایک اَور ڈورا لگاؤ اور اس کی چرخی یَ پر سے گزارو۔ عمود ا ن کو ناپو جو ا سے ڈورے پر کھینچا گیا ہے اور ک کا اس طرح حساب لگاؤ۔



شکل ۱۰۷۔ دو مائل قوتیں جن کے اثری معیار مساوی اور مخالف ہیں۔

ک کا معیارِ اثر = پ کا معیارِ اثر

ک × ا ن = پ × ا م

ک = $\frac{\text{پ × ا م}}{\text{ا ن}}$

ک کی حساب کردہ قیمت کے مساوی ایک وزن و لٹکاؤ اور ب پر کی میخ نکال لو۔ اگر سلاخ انتصابی رہے تو یہ نتیجہ اس اصول کا شاہد ہوگا کہ دو مساوی مخالف اثری معیار ایک دوسرے کو ترازو کر لیتے ہیں۔

تجربہ ۱۸:۔ اثری معیاروں کا اصول:۔

شکل ۱۰۸ میں لکڑی کی ایک قرص دکھائی گئی ہے جو ایک میخ پر آزادی سے گھوم سکتی ہے جو ایک مرکزی سوراخ میں سے گزر کر ایک انتصابی تختے پر نصب ہے۔ ڈوروں، چرخیوں اور وزنوں کے ذریعہ سے ا، ب، س، د وغیرہ پر قوتیں لگاؤ اور قرص کو توازن کی وضع میں خود بخود آنے دو۔ ہر قوت کا اثری معیار علیحدہ علیحدہ دریافت کرو اور مناسب علامت مثبت یا منفی لگاؤ۔ ہر قسم کے معیاروں کا مجموعہ معلوم کرو اور دیکھو کہ یہ مجموعے مساوی ہیں یا نہیں۔ جیسا کہ اثری معیاروں کے

شکل ۱۰۸ ـ متعدد قوتوں کے تحت قرص کا توازن

کلیے کی رو سے ان کو مساوی ہونا چاہیئے۔

دو متوازی قوتوں کا حاصل :- زیر غور دو صورتیں ہو سکتی ہیں یعنی ہم جہتی قوتیں [شکل ۱۰۹ (ا)] اور غیر ہم جہتی قوتیں [شکل ۱۰۹ (ب)] - ذیل کا طریقہ دونوں صورتوں پر حاوی ہے اور دونوں شکلوں کے لحاظ سے اسے پڑھ سکتے ہیں کہ حروف اندازی ایک ہی انداز پر کی گئی ہے۔

سہولت کی غرض سے فرض کرو کہ ایک سلاخ ا ب کے دو سروں ا اور ب پر علی الترتیب دو قوتیں پ اور ک ۹۰° کے زاویہ پر عمل کرتی ہیں۔ سلاخ کے خط میں ا اور ب پر دو مساوی اور دو مخالف قوتیں ص،

شکل ۱۰۹ ـ دو متوازی قوتوں کا حاصل

ص، استعمال کرنے سے سلاخ کے توازن میں فرق نہ آئیگا۔ قوتوں کے متوازی الاضلاع اب س ا کے ذریعہ سے ا پر عمل کرنے والی دو قوتوں پ اور ص کا حاصل ح_1 دریافت کرو، اسی طرح ب پر عمل کرنے والی قوتوں ک، ص کا حاصل ح_2 دریافت کرو۔ ح_1 اور ح_2 کے خطوط کو بڑھاؤ یہاں تک کہ وہ م پر قطع کریں اور ح_1 اور ح_2 کو م پر عمل کرنے دو۔ ح_1 اور ح_2 کو م پر عمل کرنے والے اجزاء میں تحویل کرو جو علی الترتیب اب کے متوازی اور علی القوائم ہوں۔ اب کے متوازی اجزاء میں سے ہر ایک ص کے مساوی ہوگا، پس وہ ایک دوسرے کو ترازو کرلیں گے اور اس لئے آئندہ ان پر غور کرنے کی ضرورت نہیں۔ اب کے علی القوائم اجزاء علی الترتیب پ اور ک کے مساوی ہوں گے اور یہی بقیہ قوتیں ہیں۔ پس ح انہیں کے جبری مجموعہ کے مساوی ہے۔ چنانچہ

شکل $\frac{109}{}$ (ا) میں　　ح = پ + ک .... (۱)

شکل $\frac{109}{}$ (ب) میں　　ح = پ - ک .... ($\frac{1}{\text{ا}}$)

ح کے خط کو، جو م میں سے گزرتا اور پ اور ک کے متوازی ہے، بڑھاؤ کہ وہ اب کو یا بڑھے ہوئے اب کو س پر قطع کرے۔ اس وقت مثلث م ا س اور ا سَ اَ متشابہ ہوں گے، پس

$$\frac{\text{م س}}{\text{س ا}} = \frac{\text{ا اَ}}{\text{اَ سَ}} = \frac{\text{ا اَ}}{\text{ا بَ}} = \frac{\text{پ}}{\text{ص}} \quad \text{...... (۲)}$$

نیز مثلث م ب س اور ب فَ دَ متشابہ ہیں

$$\therefore \frac{\text{م س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ب دَ}}{\text{دَ فَ}} = \frac{\text{ب دَ}}{\text{ب یَ}} = \frac{\text{ک}}{\text{ص}} \quad \text{...... }\left(\frac{2}{\text{ا}}\right)$$

(۲) کو $\left(\frac{2}{\text{ا}}\right)$ سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{\text{س ب}}{\text{س ا}} = \frac{\text{پ}}{\text{ک}} \quad \text{...... (۳)}$$

اس نتیجے سے ظاہر ہوتا ہے کہ حاصل کا خط سلاخ کو ایسے

قطعوں میں تقسیم کر دیتا ہے جو دی ہوئی قوتوں کے بالعکس متناسب ہیں۔ اگر قوتیں ہم جہت ہوں تو تقسیم اندرونی ہوتی ہے اور اگر قوتیں غیر ہم جہت ہوں تو تقسیم بیرونی ہوتی ہے۔ یہ بھی واضح رہے کہ حاصل ہمیشہ بڑی قوت کے قریب ہوتا ہے۔ اور غیر ہم جہت قوتوں کی صورت میں حاصل کی وہی جہت ہوتی ہے جو بڑی قوت کی۔ پ اور ک کا موازن سلاخ پر ح کے مساوی اور مخالف قوت لگانے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مساوی اور متوازی قوتوں کی صورت میں جن کی جہتیں مختلف ہوں مساوات $(\frac{1}{1})$ اور (۳) سے ح = پ - پ = ۰ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{س ب}}{\text{س ا}} = \frac{\text{پ}}{\text{پ}} = 1$$

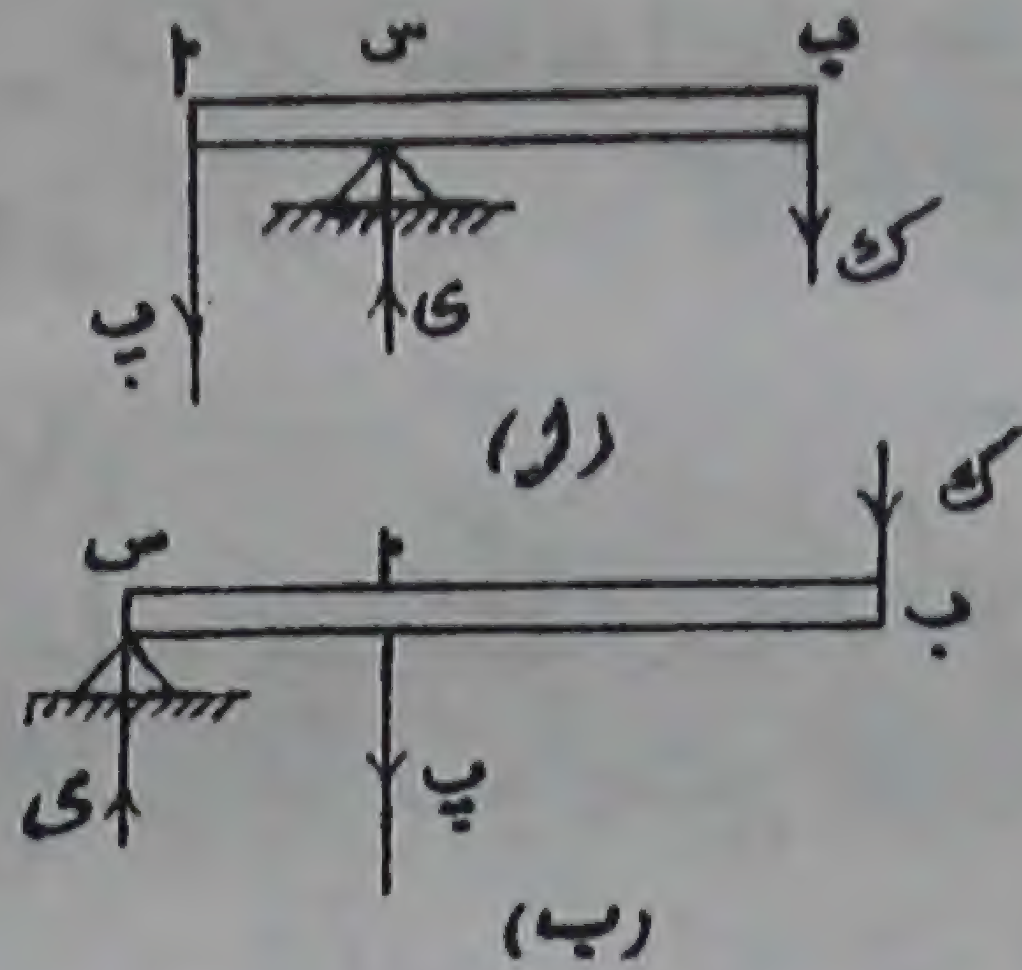
$$\therefore \text{س ب} = \text{س ا}$$

جس کی تعبیر یہ ہے کہ حاصل صفر قدر کی ایک قوت ہے جو لامتناہی پر عمل کرتی ہے جو محال ہے۔ دو مساوی متوازی اور مختلف الجہت قوتوں کا نام **جفت** رکھ دیا گیا ہے۔ جفت میں کوئی حاصل قوت نہیں ہوتی اور اس لئے کوئی قوت اس کو ترازو نہیں کر سکتی۔ جفتوں کی چند خاصیتوں پر آئندہ بحث کی جائیگی۔

متوازی قوتوں کے اثری معیار:۔ شکل نمبر ۱۱۱ (ا) اور (ب) میں جو ہلکی سلاخیں دکھلائی گئی ہیں وہ دو قوتوں پ اور ک (جو شکل نمبر ۱۱۰ (ا) میں ہم جہت ہیں اور شکل نمبر ۱۱۰ (ب) میں مخالف الجہت ہیں) اور نیز س پر چولوں کے ردِ عمل کی وجہ سے پیدا ہونے والے موازن ی کے زیرِ عمل، توازن میں ہیں
مساوات (۳) [صفحہ ۱۶۰] سے

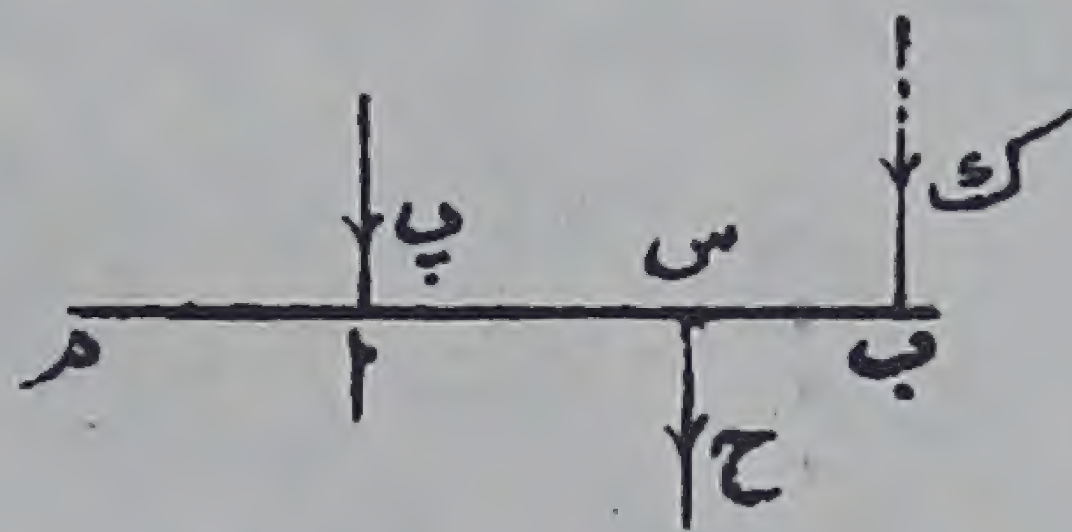
$$\frac{\text{پ}}{\text{ک}} = \frac{\text{ب س}}{\text{ا س}}$$

یا $$\text{پ} \times \text{ا س} = \text{ک} \times \text{ب س} \quad \text{..........(۱)}$$



شکل ۱۱۰۔ متوازی قوتوں کے اثری معیار

اِس نتیجہ سے ظاہر ہوتا ہے کہ پ اور ک کے اثری معیار مساوی اور مخالف ہیں۔ جس سے ہم یہ استاج کر سکتے ہیں کہ سلاخ کے گردش نہ کرنے کے لئے یہ شرط پوری ہونا چاہیئے۔ شکل ۱۱۱ میں پ اور ک کا حاصل ح ہے۔ سلاخ پر کوئی اَور نقطہ م لو اور م کے گرد اثری معیار لو۔



شکل ۱۱۱۔ م کے گِرد پ، ک اور ح کے اثری معیار

ح کا معیارِ اثر = ح × م س = ح (م ا + ا س) ---- (۲)

پ کا معیارِ اثر = پ × م ا

ک کا معیارِ اثر = ک × م ب = ک (م ا + ا س + س ب)

∴ پ کا معیارِ اثر + ک کا معیارِ اثر

= (پ × م ا) + (ک × م ا) + (ک × ا س) + (ک × س ب)

= (پ + ک) م ا + (ک × ا س) + (پ × ا س)   [(۱) سے]

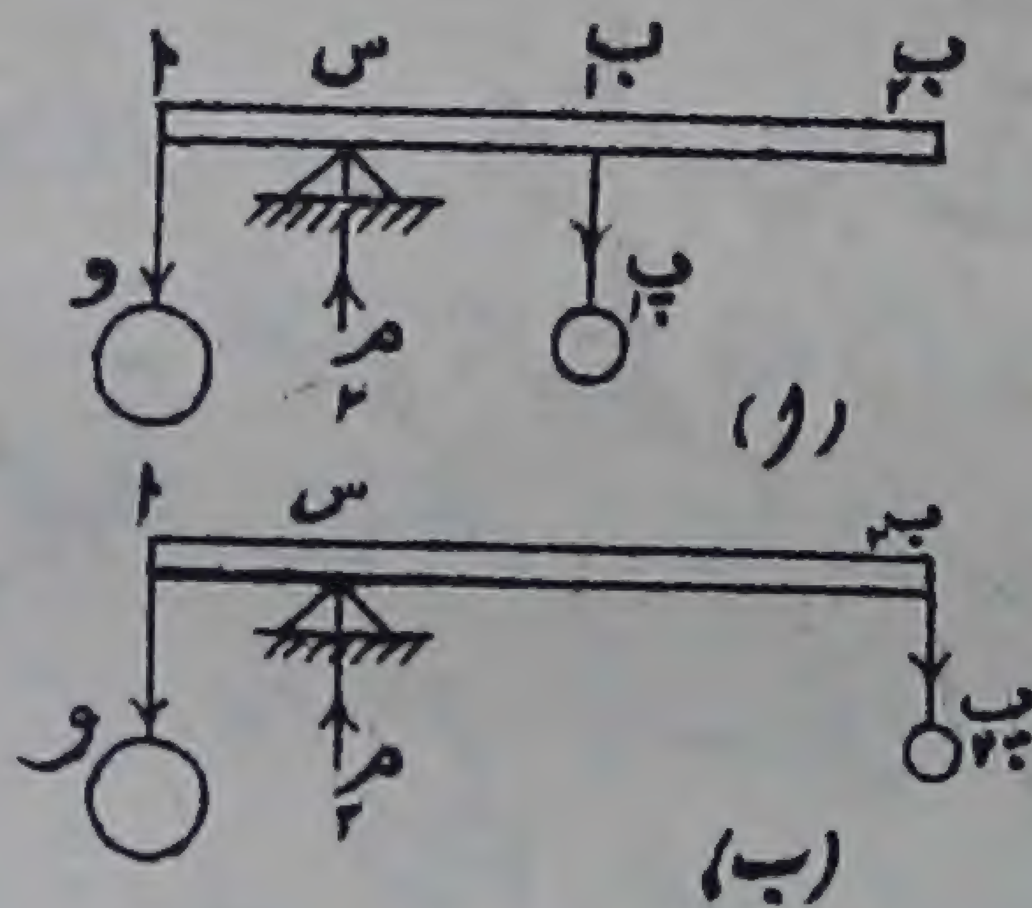
= (پ + ک) م ا + (پ + ک) ا س

= ح (م ا + ا س)

= ح کا معیارِ اثر

پس ہم وثوق کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ کسی نقطے کے گرد کسی قوت کے متوازی اجزا کے اثری معیاروں کا جبری مجموعہ حاصل کے اثری معیار کے مساوی ہوتا ہے۔

چول پر ردِّ عمل :۔ شکل ۱۱۲ (ا) میں ایک اُفقی



شکل ۱۱۲۔ چول پر ردِّ عمل

سلاخ، ا پر عامل ایک بوجھ و، ب۱ پر عامل ایک دُوسرے بوجھ پ۱ اور س پر کی چول کے ردِّ عمل م۱ کے زیرِ عمل توازن میں ہے۔ ظاہر ہے کہ م۱ مساوی اور مخالف ہے پ۱ اور و کے حاصل کے، پس

م۱ = پ۱ + و

شکل ۱۱۲ (ب) میں بھی وہی سلاخ دکھلائی گئی ہے، اِس میں بوجھ و اِسی جگہ پر عامل ہے لیکن اب اس کے توازن کے لئے ب۲ پر عامل ایک قوت پ۲ ہے اور چول کا مستوی م۲ ہے۔

حسب سابق

$$م_۲ = پ_۲ + و$$

شکل ۱۱۲ (ا) میں

$$پ_۱ \times ب_۱س = و \times اس$$

$$\therefore \quad پ_۱ = \frac{اس}{ب_۱س} و$$

شکل ۱۱۲ (ب) میں اسی طرح پر

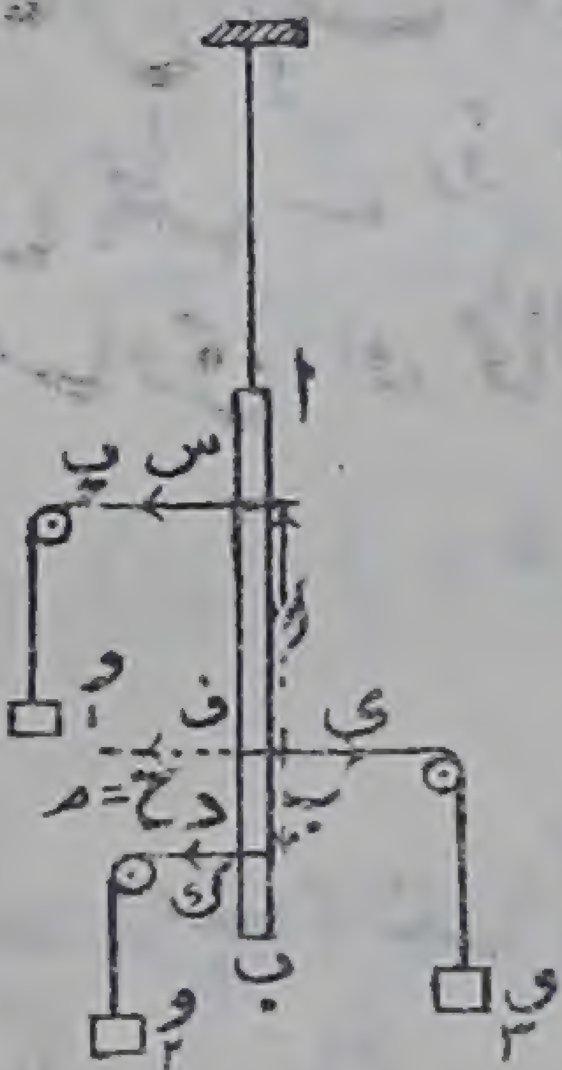
$$پ_۲ \times ب_۲س = و \times اس$$

$$\therefore \quad پ_۲ = \frac{اس}{ب_۲س} \times و$$

چونکہ دونوں صورتوں میں و اور اس ایک ہی ہیں اور چونکہ ب$_۲$س بڑا ہے ب$_۱$س سے، اس لئے پ$_۲$ چھوٹا ہے پ$_۱$ سے، لہذا م$_۲$ چھوٹا ہے م$_۱$ سے۔ پس یہ ملحوظ خاطر رہے کہ اگرچہ دونوں صورتوں میں عام اثر ایک ہی ہے یعنی سلاخ توازن میں ہے، تاہم چولوں پر اثرات متماثل نہیں ہیں۔ اور نہ سلاخ کے مادے میں زور پیدا کرنے میں بوجھوں کے اثرات ایک ہوں گے۔

تجربہ ۱۹ :- دو متوازی قوتوں کا مستوی :-

ایک ثابت سہارے سے ایک سلاخ اب کو ا پر ڈورا باندھ کر لٹکاؤ [شکل ۱۱۳]۔ سلاخ کو ایک انتصابی تختے کے سامنے لٹکنے دو اور ا اور ب پر میخ لگا کر سلاخ کو حالتِ توازن میں قائم کر دو۔ ڈورے، چرخیاں اور اوزان و$_۱$، و$_۲$ استعمال کر کے س اور د پر متوازی قوتیں پ اور ک لگاؤ۔ حساب سے حاصل ح اور

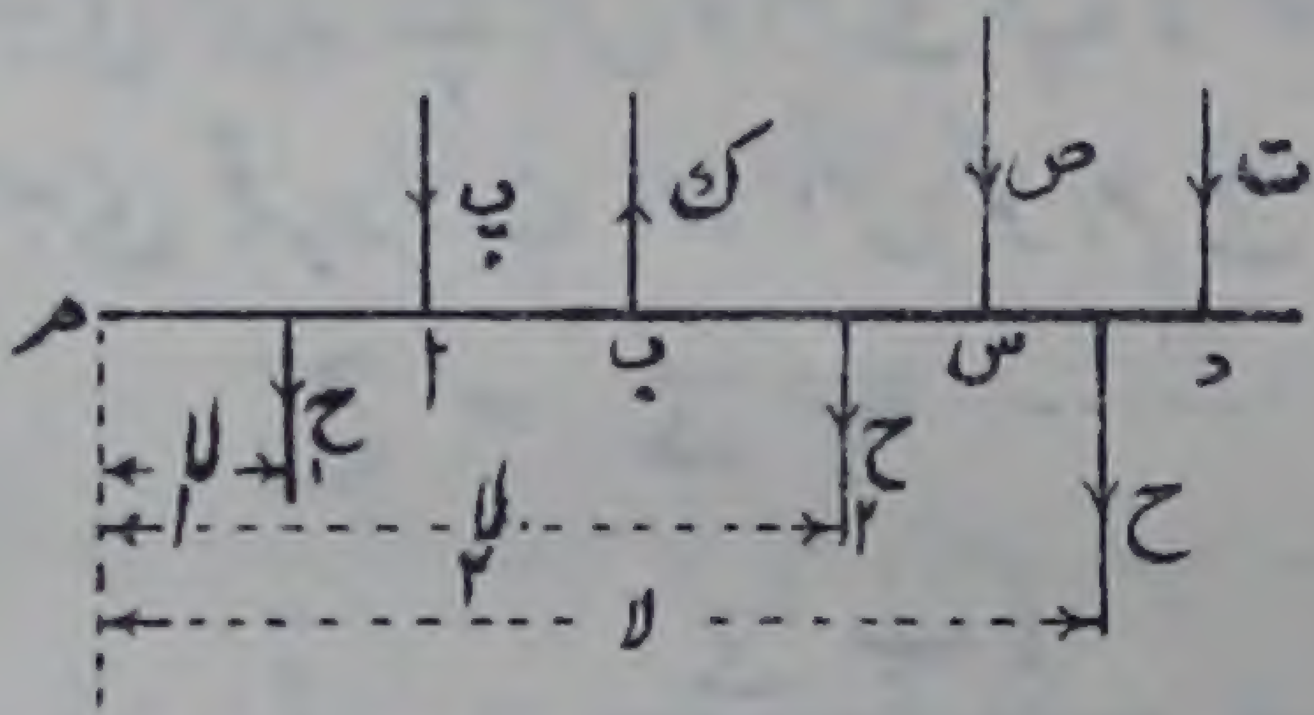


شکل ۱۱۳۔ ایک ہی جہت کی دو متوازی قوتوں کا موازن

اُس کا نقطۂ عمل دریافت کرو۔ اور پھر ایک دُوسرے ڈورے، چرخی اور وزن و_2 کے ذریعہ سے ح_1 کے مساوی اور مخالف ایک موازن ھ لگاؤ۔ میخوں کو اب علیحدہ کردو۔ اگر سلاخ اپنی وضع پر غیر متغیر رہے تو یہ اس امر کی شہادت ہوگی کہ حساب کا طریقہ صحیح تھا۔

اِس تجربے کو دوبارہ کرو جس میں پ اور ک مختلف الجہت ہوں۔ نیز اِس امر کی تصدیق کرو کہ اگر پ اور ک مساوی اور مخالف جہت کے ہوں اور متوازی خطوط میں عمل کریں تو صرف ایک قوت سلاخ کو توازن میں نہیں رکھ سکتی۔

متعدد متوازی ہم مستوی قوتوں کا حاصل:- شکل ۱۱۴ میں قوتیں پ، ک، ص، ت علی الترتیب ایک سلاخ کے نقاط ا، ب، س، د پر عمل کرتی ہیں۔ صفحہ ۱۵۹ پر جو طریقہ دو متوازی قوتوں کے حاصل دریافت کرنے کا بیان کیا گیا ہے اُس کو بار بار استعمال کرکے ہم ان قوتوں کا حاصل دریافت کرسکتے ہیں۔



شکل ۱۱۴ - متوازی قوتوں کا حاصل

کسی مناسب نقطہ ھ کو نقطۂ حوالہ فرض کرلو۔ پہلے پ اور ک کا حاصل ح_1 دریافت کرو۔

$$\text{ح}_1 = \text{پ} - \text{ک} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{ح}_1 \, \text{لا}_1 = \text{پ}\,(\text{ھا}) - \text{ک}\,(\text{ھب})$$

$$\therefore \text{لا}_1 = \frac{(\text{پ} \times \text{ھا}) - (\text{ک} \times \text{ھب})}{\text{پ} - \text{ک}} \quad \ldots\ldots (2)$$

اب ح_1 اور ص کا حاصل ح_2 دریافت کرو۔

$$\text{ح}_2 = \text{ح}_1 + \text{ص} = \text{پ} - \text{ک} + \text{ص} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\text{ح}_2 \, \text{لا}_2 = \text{ح}_1 \, \text{لا}_1 + (\text{ص} \times \text{ھس})$$

= (پ × مرا) - (ک × مرب) + (ص × مرس)

∴ لا۲ = [(پ × مرا) - (ک × مرب) + (ص × مرس)] / (پ - ک + ص) .... (۴)

اسی طرح ح۲ اور ت کا حاصل ح دریافت کرو تو ح دی ہوئی قوتوں کا حاصل ہوگا۔

ح = ح۲ + ت = پ - ک + ص + ت .... (۵)

ح لاَ = ح۲ لا۲ + (ت × مرد) = (پ × مرا) - (ک × مرب) + (ص × مرس) + (ت × مرد)

∴ لاَ = [(پ × مرا) - (ک × مرب) + (ص × مرس) + (ت × مرد)] / (پ - ک + ص + ت) .... (۶)

اِس نتیجہ میں شمار کنندہ م کے گرد دی ہوئی قوتوں کے اثری معیاروں کا جبری مجموعہ ہے جس کو ہم Σ پ لا لکھ سکتے ہیں۔ نسب نما دی ہوئی قوتوں کا جبری مجموعہ ہے اور اُس کو ہم Σ پ لکھ سکتے ہیں۔ پس (۵) اور (۶) سے

ح = Σ پ .... (۷)

لاَ = Σ پ لا / Σ پ .... (۸)

یہ ظاہر ہے کہ حاصل دیے ہوئے نظام کی قوتوں کے متوازی ہے۔ اِس کی جہت (۷) سے حاصل کردہ نتیجے کی علامت سے متعین ہوتی ہے۔

ح کو الٹ دینے سے دیے ہوئے نظام کا موازن دریافت ہوگا۔

اگر دی ہوئی قوتیں توازن میں ہوں تو ح صفر ہوگا اور دی ہوئی قوتوں کے اثری معیاروں کا جبری مجموعہ صفر ہوگا۔ پس شرائطِ توازن یہ ہیں:۔

Σ پ = ۰ .... (۹)

Σ پ لا = ۰ .... (۱۰)

یہ شرطیں بہ یک وقت پُوری ہونی چاہییں۔

اگر Σ پ صفر ہو اور Σ پ لا صفر نہ ہو تو اِس کی تعبیر یہ ہے کہ وہ نظام دو مختلف جہت کی متوازی قوتوں میں تحویل کیا جا سکتا ہے یعنی ایک جُفت میں [صفحہ ۱۶۱]۔ اگر Σ پ کی کوئی

عددی قیمت ہو اور ح پ کا صفر ہو تو نقطہ م جس کے گرد معیارِ اثر لئے گئے ہیں حاصل کے خط پر واقع ہوگا۔

بوجھ دار کڑی کے ردِّ عمل ——— بوجھ دار کڑی کے سہاروں کے ردِّ عمل دریافت کرنے کے لئے اصولِ بالا استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ ایک مثال اِس طریقہ کو واضح کر دیگی۔

مثال:۔ ایک کڑی ا ب، ۱۶ فُٹ فاصلے سے دو سہاروں ا اور ب پر قائم ہے۔ اور اِس سے جیسا کہ دکھلایا گیا ہے [شکل ۱۱۵] ۲، ۱، ۰٫۷۵، ۰٫۵ ٹن کے وزن آویزاں ہیں۔ تو سہاروں کے ردِّ عمل پ اور ک دریافت کرو۔

مساواتِ بالا سے

$$ح\ پ = ۰$$

$$\therefore\ پ + ک = ۲ + ۱ + ۰٫۷۵ + ۰٫۵$$

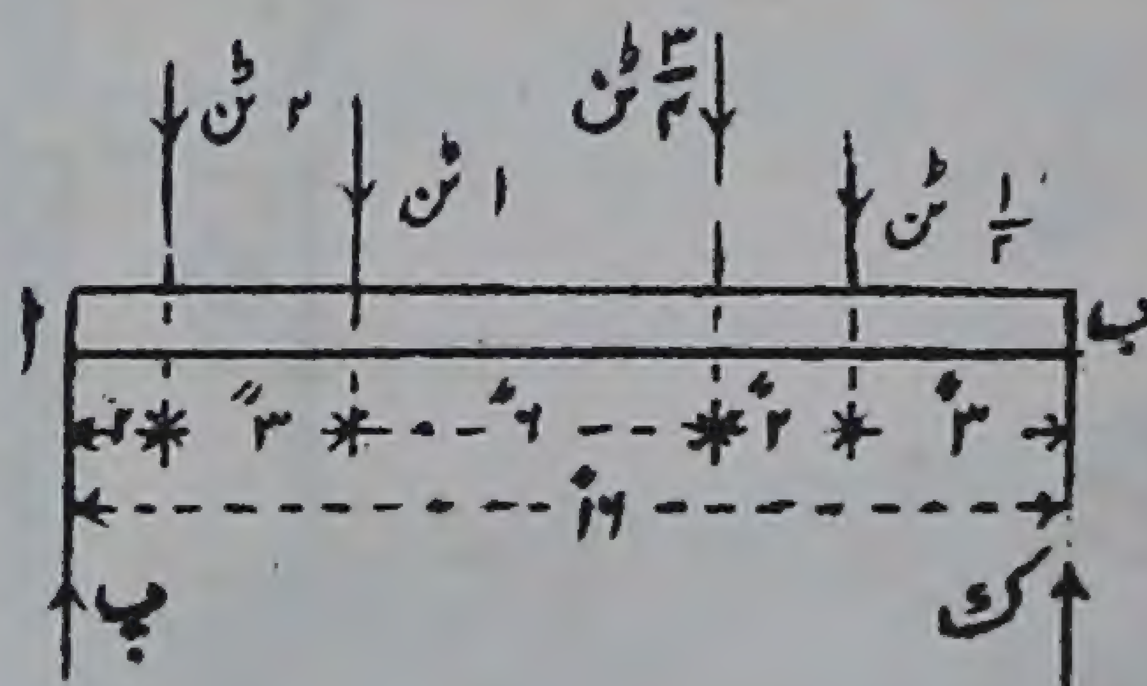
$$= \underline{۴٫۲۵\ ٹن}$$

ب کے گرد معیارِ اثر لینے سے پ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اِس نقطے کے گرد ک کا کوئی معیارِ اثر نہیں اور اِس لئے حساب میں یہ شمار نہ ہوگا۔

موافق سمت ساعت اثری معیاروں کا مجموعہ مخالف سمت ساعت اثری معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔ پس

$$پ \times ۱۶ = (۲ \times ۱۴) + (۱ \times ۱۱) + (۰٫۷۵ \times ۵) + (۰٫۵ \times ۳)$$

$$\therefore\ پ = \underline{۲٫۷۶۵}\ ٹن$$



شکل ۱۱۵۔ کڑی کے ردِّ عمل

اِسی طرح ا کے گِرد معیارِ اثر لینے سے ک معلوم ہو سکتا ہے۔ چنانچہ

ک × ۱۶ = (۲ × ۲) + (۱ × ۵) + (۱۱ × ۰٫۷۵) + (۱۳ × ۰٫۵)

∴ ک = ۱٫۴۸۴ ٹن

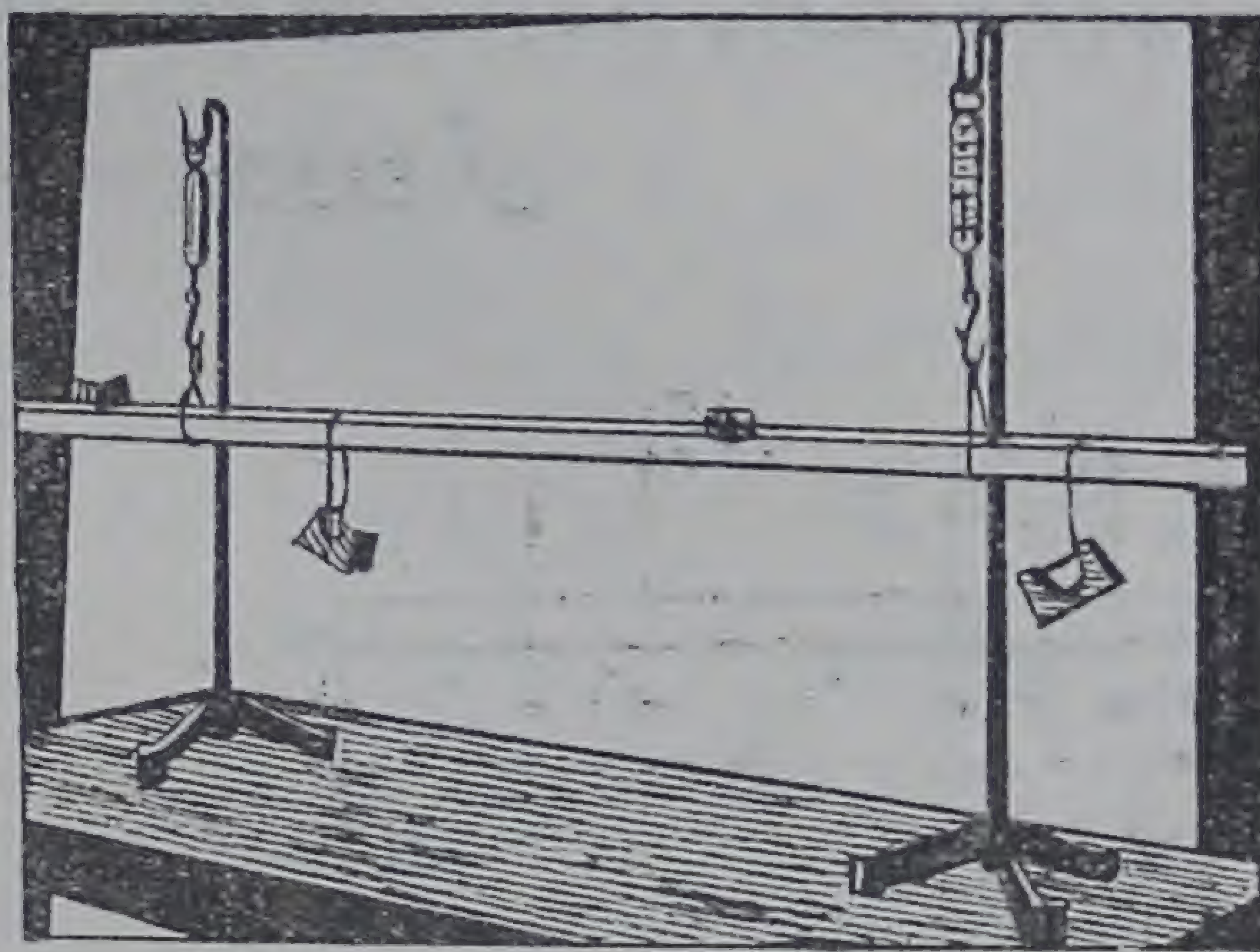
اِن حساب کردہ قیمتوں کا مجموعہ

پ + ک = ۲٫۷۶۵ + ۱٫۴۸۴ = ۴٫۲۴۹ ٹن

اور یہ نتیجہ پہلے سے حاصل کردہ رقم یعنی ۴٫۲۵ سے جہاں تک کہ حساب و شمار میں صحت کا لحاظ رکھا گیا ہے، ملتا جلتا ہے۔

تجربہ ۳۰ — کڑی کے ردِّ عمل :-

دو سہاروں سے ایک چوبی سلاخ لٹکاؤ اور کمانیدار ترازو استعمال کرو تاکہ سہاروں کے ردِّ عمل معلوم ہوسکیں [شکل ۱۱۶]۔ کڑی پر وزن رکھنے سے پہلے کمانیدار ترازوؤں کو پڑھ لو۔ فرض کرو کہ اِن کے نشانات علی الترتیب $پ_۱$ اور $ک_۱$ پونڈ وزن ہیں۔ کڑی پر چند وزن رکھو اور حساب سے ردِّ عمل معلوم کرو۔ کڑی کے وزن کو نظرانداز کردو۔ پھر کمانیدار ترازوؤں کو پڑھو، فرض کرو اِس مرتبہ پ اور ک پونڈ وزن دریافت ہو۔ تو فرق (پ - $پ_۱$) اور (ک - $ک_۱$) پونڈ وزن کو حساب کردہ قیمتوں کے مساوی ہونا چاہیئے۔



شکل ۱۱۶۔ کڑی کے سہاروں کے ردِّ عمل دریافت کرنے کے لئے آلہ

آٹھویں فصل کی مشقیں

(۱) ایک بائیسکل میں کرینک محور سے پائدان کے مرکز تک ۷ انچ لمبے ہیں۔ اگر سوار نیچے والی ضرب میں برابر ۲۰ پونڈ وزن کا ایک مستقل دباؤ انتصاباً لگائے تو دریافت کرو کہ گردش کا معیارِ اثر کیا ہوگا جب کہ کرینک چوٹی پر ہو۔ نیز جب کہ وہ چوٹی کی وضع سے ۳۰°، ۶۰°، ۹۰°، ۱۲۰°، ۱۵۰° اور ۱۸۰° کے زاویے بنا چکا ہو۔

(۲) ایک چوبی قرص اپنے مرکز ھ سے گزرتے ہوئے ایک اُفقی محور کے گرد ایک انتصابی مستوی میں آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ قرص کے ایک طرف ہلکی ہلکی کھونٹیاں ا اور ب ٹھونک دی جاتی ہیں۔ ھ ا = ھ ب = ۶ انچ اور ھ ا اور ھ ب ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ باریک ڈورے ا اور ب پر لگا دیے جاتے ہیں اور انتصاباً آویزاں رہتے ہیں۔ اِن ڈوروں میں علی الترتیب ۴ پونڈ اور ۲ پونڈ کے وزن لٹکے ہوئے ہیں۔ وہ وضع بتلاؤ اور شکل میں بھی دکھاؤ جس میں قرص توازن میں رہے۔

(۳) ۸ پونڈ وزن اور ۶ پونڈ وزن کی ایک ہی جہت والی دو متوازی قوتیں ایک جسم پر ۱۲ انچ کے فاصلے سے عمل کرتی ہیں حاصل دریافت کرو۔

(۴) اگر قوتیں مخالف سمت کی ہوں تو سوال ۳ کا جواب کیا ہوگا۔

(۵) ۲ فٹ لمبی ایک یکساں اُفقی سلاخ کے ایک کنارے پر ۱۲ پونڈ وزن آویزاں ہے۔ اور سلاخ اپنے مرکز پر ایک چول پر قائم ہے۔ ۱۸ پونڈ کے وزن کے ذریعہ سے توازن برقرار رکھنا ہے۔ بتلاؤ کہ وہ کہاں رکھا جائے۔

(۶) ایک سلاخ اب کے کنارے ا سے ۲ انچ، ۹ انچ، اور ۱۵ انچ کے فاصلے سے علی الترتیب ۳ پونڈ، ۰ پونڈ، اور ۱۰ پونڈ کے جسم آویزاں ہیں۔ سلاخ کے وزن کو نظر انداز کر دو اور وہ نقطہ بتلاؤ جس پر سلاخ کو سہارا دینا چاہیئے تاکہ توازن ممکن ہو سکے۔

(۷) ایک کڑی ۱۲ فٹ لمبی ہے اور اپنے کناروں کے سہاروں پر قائم ہے۔

اِس کے ایک کنارے سے ۴ فُٹ کے فاصلے پر ۲ء۵ ٹن کا ایک وزن رکھا ہے۔ کڑی کے وزن کو نظرانداز کر دو اور سہاروں کے ردِّ عمل دریافت کرو۔

(۸) ایک شخص، جس کا وزن ۱۵۰ پونڈ ہے اور جو بغیر مدد کے ۳۰۰ پونڈ وزنی جسم کو اُٹھا سکتا ہے، ۳½ فُٹ لمبا ایک بیرم استعمال کرتا ہے۔ تبلاؤ کہ وہ کتنا بوجھ اُٹھا سکیگا جب کہ

(ا) وزن بیرم کے کنارے پر ہو اور اِس کنارے سے چول ۴ اِنچ کے فاصلے پر ہو۔

(ب) چول بیرم کے ایک کنارے پر ہو اور اِس کنارے سے وزن ۴ اِنچ کے فصل پر ہو۔

(۹) ایک ہلکی سلاخ ا ب ایک میتر لمبی ہے اور سلاخ کے علی القوائم متوازی قوتیں حسب ذیل عمل کرتی ہیں:- ا پر ۲ کلوگرام وزن، ا سے ۱۵ سمر پر ۴ کلوگرام وزن، ا سے ۵۵ سمر پر ۶ کلوگرام وزن، ب پر ۸ کلوگرام وزن۔ اِن قوتوں کا حاصل دریافت کرو۔

(۱۰) ایک ہلکی اُفقی سلاخ ا ب ۲ فُٹ لمبی ہے اور کناروں کے سہارے قائم ہے۔ ا پر ردِّ عمل انتصابی سے ۳۰° پر عمل پیرا ہے۔ اگر ا سے ۸ اِنچ کے فاصلے پر ۳ پونڈ وزن کا ایک بوجھ رکھ دیا جائے تو ہر دو ردِّ عمل کو دریافت کرو۔

(۱۱) ایک ہلکی اُفقی سلاخ ا ب ۳ فٹ لمبی ہے اور کناروں کے سہارے قائم ہے۔ ا پر ردِّ عمل انتصابی ہے۔ سلاخ کے ایک نقطہ س پر ۴ پونڈ وزن کی ایک قوت عمل کرتی ہے۔ ا س کا طول ا فُٹ ہے اور ا س اور خطِ قوت کے درمیان زاویہ ۶۰° کا ہے۔ ہر دو سہاروں کے ردِّ عمل دریافت کرو۔

(۱۲) ایک اُفقی بیرم ا ب ۶ فُٹ لمبا ہے اور ایک چول س پر قائم ہے۔ ا س کا طول ۴ اِنچ ہے۔ اگر ۴۰۰ پونڈ وزن کا ایک بوجھ ا سے آویزاں کیا جائے، تو بتلاؤ کہ اس وزن کی وضع اور قدر کیا ہوگی جو بیرم پر لگانا چاہیئے تاکہ سہارے کا ردِّ عمل اقل ہو۔ ردِّ عمل کی اقل قیمت بتلاؤ۔ بیرم کے وزن کو نظرانداز کردو۔

(۱۳) ایک تختہ ا ب جس کا طول ۱۰ فٹ ہے ایک انتصابی دیوار سے ۶ فٹ کے فاصلے سے ایک نقطہ پر قبضہ بند ہے۔ تختہ کا بالائی کنارہ ب دیوار کے سہارے لگا ہُوا ہے۔ فرض کرلو کہ قبضہ اور دیوار دونوں چکنے ہیں۔ اگر ا سے ۲، ۶ اور ۸ فٹ کے فاصلے سے علی الترتیب ۴۰، ۶۰ اور ۱۰۰ پونڈ وزن کے بوجھ لٹکائے جائیں تو دیوار اور قبضہ کے ردِّ عمل دریافت کرو۔ تختے کے وزن کو نظرانداز کردو۔

(۱۴) ایک خمیدہ بیرم ا س ب ایک چول س پر نصب ہے۔ بازو ا س اور ب س دونوں ۱۲۰° پر ملتے ہیں۔ ا س = ۱۸ انچ ب س = ۱۰ انچ اور اُفقی ہے۔ اگر ب سے ۱۵۰ پونڈ وزن کا ایک بوجھ لٹکایا جائے تو س کے گرد معیارِ اثر لے کر دریافت کرو کہ ا پر کتنی اُفقی قوت لگانی چاہیئے۔ نیز چول س کا ردِّ عمل دریافت کرو۔

(۱۵) ایک کڑی ا ب جس کا طول ۴۰ فٹ ہے ا پر اور ب سے ۱۰ فٹ کے فاصلے سے ایک نقطہ پر سہاروں سے قائم ہے۔ ا سے ۸، ۲۰، ۳۰ اور ۴۰ فٹ کے فاصلے سے علی الترتیب ۴، ۸، ۶ اور ۱۰ ٹن وزن کے بوجھ رکھے جاتے ہیں۔ کڑی کے وزن کو نظرانداز کردو اور سہاروں کے ردِّ عمل دریافت کرو۔

(۱۶) ۱۲ فٹ لمبا ایک تختہ دو دیواروں پر بطور پُل قائم ہے۔ ۱۵۰ پونڈ وزنی ایک شخص اِس تختہ پر سے گزرتا ہے۔ جب وہ شخص ایک کنارے سے ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰ فٹ کے فاصلے پر ہو تو تختے کے سہاروں پر ردِّ عمل کیا ہوں گے۔ تختے کے وزن کو نظرانداز کردو۔ ایک ترسیم بناؤ جس میں اِن فاصلوں کو فصلہ قرار دو اور بائیں سہارے کے ردِّ عمل کو معین قرار دو۔

(۱۷) سوال نمبر ۱۶ میں دو شخص ا اور ب تختے پر سے داہنی طرف سے بائیں جانب گزرتے ہیں۔ ا سے ب ۴ فٹ پیچھے رہتا ہے۔ ہر آدمی کا وزن ۱۵۰ پونڈ ہے۔ تو بائیں سہارے کے ردِّ عمل دریافت کرو جب کہ ا اِس سے ذیل کے فاصلوں پر ہو:- ۱۲، ۱۰، ۸، ۶، ۴، ۲، ۰۔ تختے کے وزن کو نظرانداز کردو۔ ایک ترسیم بناؤ جس میں بائیں سہارے کے ردِّ عمل کو معین مانو اور اِس سہارے سے ا کے فاصلوں کو فصلہ قرار دو۔

(۱۸) ایک کشتی میں نشستیں تین تین فٹ کے فاصلے سے ہیں۔ ناخدا کا وزن ۱۱۰ پونڈ ہے۔ پیشانی سے شروع کر کے چاروں پتواریوں کے وزن پونڈوں میں حسبِ ذیل ہیں۔ ۱۶۲، ۱۵۵، ۱۴۹، ۱۶۶، تو حاصل وزن کی قدر اور وضع دریافت کرو۔

(۱۹) متوازی قوتوں کے زیرِ عمل ایک جسم کے توازن کے لئے شرائط بیان کرو۔ ۱۰ انچ کے فصل سے لگے ہوئے دو کمانیدار ترازووں کے کانٹوں سے ناقابلِ لحاظ وزن کی ایک پتلی سلاخ اُفقاً قائم ہے۔ ایک دُوسرے سے ۲۰ انچ کے فاصلے پر دو جسم علی الترتیب ۲ اور ۳ پونڈ وزن کی سلاخ سے لٹکے ہوئے ہیں۔ بتلاؤ کہ ان وزنوں کو کیونکر لٹکاؤ گے کہ ہر کمانیدار ترازو کا نمایندہ ایک ہی نشان پر رہے۔

[کلکتہ]



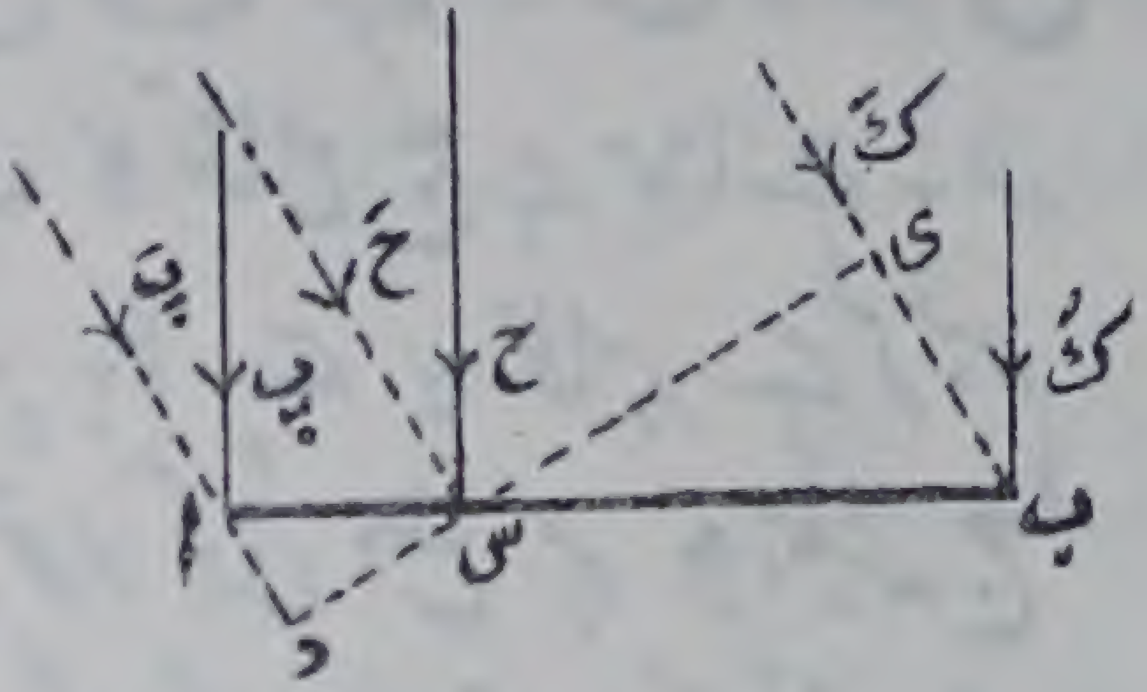
نویں فصل

متوازی قوتوں کا مرکز، مرکزِ جاذبہ

متوازی قوتوں کا مرکز:- شکل ۱۱۷ میں ا ب ایک سلاخ ہے جس کے کناروں پر دو قوتیں پ اور ک سلاخ سے °۹۰ بناتی ہوئی عمل کرتی ہیں۔ پ اور ک کا حاصل ح سلاخ کو دو قطعوں میں تقسیم کر دیتا ہے جو اِس طرح معلوم کئے جاتے ہیں کہ

پ : ک = ب س : ا س [صفحہ ۱۶۰] --- (۱)

پ اور ک کی مقدار بدلے بغیر اِن کے خطوط کو متوازی رکھ کر نئی وضع پَ اور کَ میں گھما دو۔ س سے د س ی ایک عمود پَ اور کَ پہ گراؤ۔ پَ اور کَ کا حاصل حَ، د ی کو ایسے قطعوں میں تقسیم کرتا ہے جو پَ اور کَ کے بالعکس متناسب ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ مثلث ا س د اور ب س ی متشابہ ہیں، پس



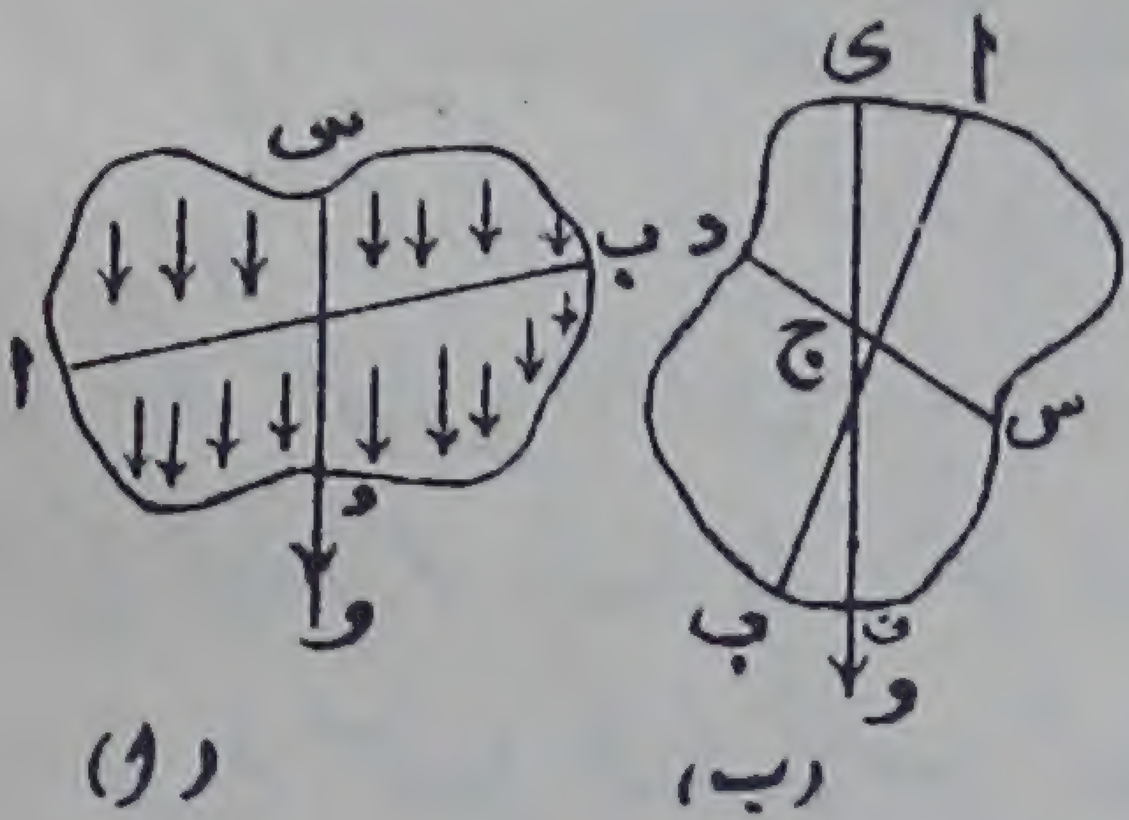
شکل ۱۱۷ ۔ متوازی قوتوں کا مرکز

ی س : د س = ب س : ا س = پ : ک

(۱) سے۔ پس معلوم ہُوا کہ حَ بھی س میں سے گزرتا ہے۔ اِس نقطہ کو متوازی قوتوں پ اور ک کا **مرکز** کہتے ہیں۔

اگر سلاخ پر متعدد متوازی قوتیں عمل کریں تو یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اِن کا حاصل ہمیشہ اِسی نقطہ میں سے گزریگا بشرطیکہ قوتیں قدر میں غیر متغیر رہیں۔

مرکزِ جاذبہ :- ایک جسم کا ہر ذرّہ وزن رکھتا ہے۔ پس کسی جسم پر جو تجاذبی عمل محسوس ہوتا ہے زمین کے مرکز کی طرف مائل کثیر التعداد قوتوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ اوسط جسامت کا اگر جسم ہو تو ان قوتوں کو متوازی ہی سمجھنا چاہیئے۔ کسی معقول حد تک تجاذبی قوتوں کی سمتوں کا بدلنا ممکن نہیں۔ لیکن جسم کو مائل کر کے اِس طرح کا اثر پیدا کیا جا سکتا ہے۔ ذرّوں کے وزن اب بھی انتصابی خطوں میں عمل کرتے ہیں لیکن جسم کے کسی خط اب کی اضافت سے اِن کی سمتیں بدل جائینگی [شکل ۱۱۸ (ا) اور (ب)]



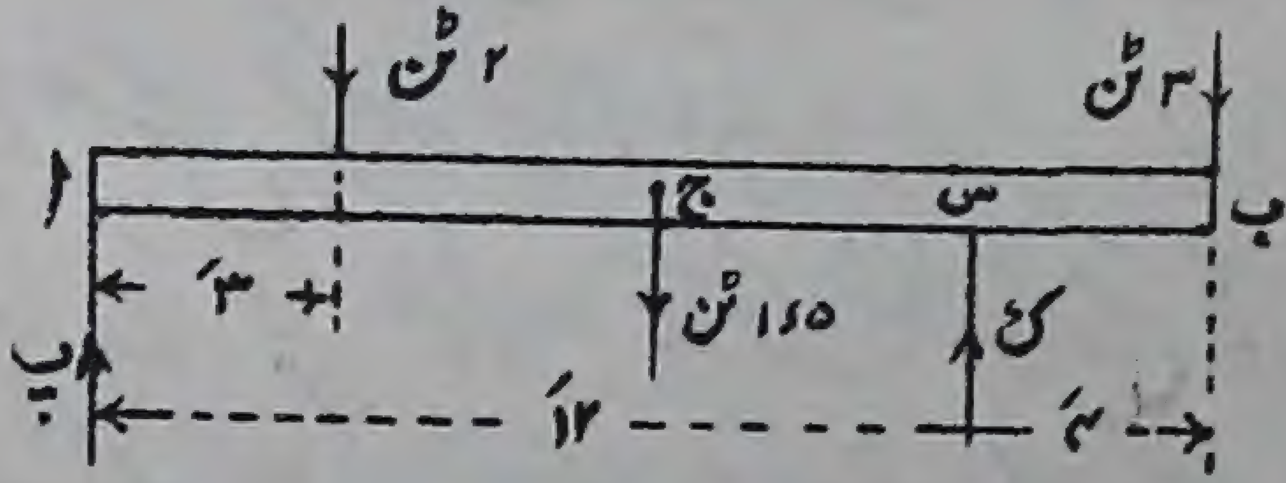
شکل ۱۱۸۔ مرکزِ جاذبہ

فرض کرو کہ جسم کا وزن و ہے اور اِس کا خطِ عمل شکل ۱۱۸ (ا) میں س د ہے اور شکل ۱۱۸ (ب) میں ی ف ہے۔ س د اور ی ف کا تقاطع ج پر ہوتا ہے۔ اور تقریرِ بالا سے یہ ظاہر ہے کہ جسم کی خواہ کوئی وضع ہو و ہمیشہ ج میں گزریگا۔ ج جسم کے ذرّاتِ ترکیبی کے وزنوں کا مرکز ہے اور **مرکزِ جاذبہ** کہلاتا ہے۔

کسی جسم پر عاملہ قوتوں کے معیارِ اثر لیتے وقت جسم کے مجموعی وزن کے شمار کا سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ اِس کو ایک انتصابی عاملہ قوت سمجھا جائے جو جسم کے مرکزِ جاذبہ پر مجتمع ہے۔ پس مرکزِ جاذبہ کی تعریف یوں کی جا سکتی ہے کہ مرکزِ جاذبہ سے مراد وہ **نقطہ** ہے جس پر جسم کے مجموعی وزن کو مجتمع تصور کیا جا سکتا ہے بغیر

اِس کے کہ جسم پر تجاذبی اثر متغیر ہو۔

مثال ۱:۔ ایک یکساں کڑی ا ب کا وزن ۵ء۱ ٹن ہے۔اور اِس کا مرکزِ جاذبہ اِس کے طول کے وسط میں ہے۔ کڑی ۱۶ فُٹ لمبی ہے۔ اور کنارے ا کے سہارے اور کنارے ب سے ۴ فٹ کے فاصلے سے نقطہ س کے سہارے سے قائم ہے (شکل ۱۱۹)۔ا سے ۳ فٹ کے فاصلے سے اور ب پر علی الترتیب دو بوجھ ۲ اور ۳ ٹن وزن کے رکھے جاتے ہیں۔ سہاروں کے ردِّ عمل دریافت کرو۔



شکل ۱۱۹

مرکزِ جاذبہ ج کنارے ا سے ۸ فُٹ کے فاصلے پر ہے۔کڑی کا وزن جو ۵ء۱ ٹن وزن ہے ج پر لگاؤ اور پ کے معلوم کرنے کے لئے س کے گرد معیارِ اثر لو۔

$$(\text{پ} \times ۱۲) + (۳ \times ۴) = (۲ \times ۹) + (۱٫۵ \times ۴)$$

$$\text{پ} = \frac{۱۲ - ۶ + ۱۸}{۱۲} = \frac{۱۲}{۱۲}$$

= ۱ ٹن وزن

ک کے دریافت کرنے کے لئے ا کے گرد معیارِ اثر لو۔

$$\text{ک} \times ۱۲ = (۱۶ \times ۳) + (۸ \times ۱٫۵) + (۳ \times ۲)$$

$$\text{ک} = \frac{۶ + ۱۲ + ۴۸}{۱۲} = \frac{۶۶}{۱۲}$$

= ۵ء۵ ٹن وزن

تصدیق :- پ+ک = ۱ + ۵ء۵ = ۶ء۵ ٹن وزن

= کڑی پر مجموعی بوجھ

مرکزِ جاذبہ کی چند سادہ صورتیں:- بعض سادہ صورتوں میں محض جسم کے معائنہ سے مرکزِ جاذبہ کی وضع دریافت ہو سکتی ہے۔ چنانچہ ایک پتلی سیدھی سلاخ یا یکساں عمودی تراش کے تار کا مرکزِ جاذبہ ج طول کے وسط میں ہوتا ہے۔ ایک پتلی یکساں مربع یا مستطیل تختی میں ج، وتروں کے نقطۂ تقاطع پر ہوتا ہے۔ ایک پتلی یکساں مدوّر تختی میں ج اُس کے ہندسی مرکز پر ہوتا ہے۔

ایک پتلے یکساں پتر کا بنا ہُوا متوازی الاضلاع ا ب [شکل ۱۲۰] کے متوازی ترتیب دادہ پتلی پتلی یکساں سلاخوں سے بنا تصور کیا جا سکتا ہے۔ ہر سلاخ کا مرکزِ جاذبہ سلاخ کے طول کے وسط میں ہوتا ہے، لہذا اِن کے تمام مراکزِ جاذبہ ح ک پر واقع ہیں جو ا ب اور س د کی تنصیف کرتا ہے۔ اِس لئے متوازی الاضلاع کا مرکزِ جاذبہ ح ک پر واقع ہے۔ اِسی طرح یہ تصور کیا جا سکتا ہے کہ تختی ا د کے



شکل ۱۲۰۔ متوازی الاضلاع کا مرکزِ جاذبہ

متوازی ترتیب دادہ سلاخوں سے بنی ہے۔ اِن تمام سلاخوں کے جاذبی مرکز، اور اِس لئے متوازی الاضلاع کا مرکزِ جاذبہ بھی، ی ف پر واقع ہیں جو ا د اور ب س کی تنصیف کرتا ہے۔ پس ج خطوط ح ک اور ی ف کے نقطۂ تقاطع پر واقع ہے۔ ظاہر ہے کہ وتر ا س اور ب د بھی ج پر متقاطع ہیں۔

اِسی طرح ایک پتلی مثلثی تختی پر بھی یہی طریقہ جاری ہو سکتا ہے [شکل ۱۲۱]۔ پہلے ا ب کے متوازی پٹیاں لو۔ جس سے ظاہر ہو جائیگا کہ تختی کا مرکزِ جاذبہ س ی پر واقع ہے جو ا ب کی تنصیف کرتا ہے اور ا ب کے متوازی تمام پٹّیوں کی بھی تنصیف کرتا ہے۔ اِس کے بعد ب س کے متوازی پٹّیاں لو۔ ا د ضلع

ب س اور ب س کے متوازی تمام پٹیوں کی تنصیف کرتا ہے، اس لئے مرکزِ جاذبہ اس پر واقع ہے۔ پس س ی اور ا د کے نقطۂ تقاطع پر ج واقع ہے۔



شکل ۱۲۱۔ مثلث کا مرکزِ جاذبہ

شکل ۱۲۱ میں د ی کو ملا دو تو مثلث ب ی د اور ب ا س متشابہ ہونگے، کیونکہ د ی متوازی ہے ا س کے۔ اس لئے د ی = $\frac{1}{2}$ ا س۔ نیز مثلث د ی ج اور ا س ج متشابہ ہیں۔ پس

$$\frac{\text{د ج}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{د ی}}{\text{ا س}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ا س}}{\text{ا س}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{د ج} = \frac{1}{2}\text{ا ج}$$

$$= \frac{1}{3}\text{ا د}$$

اِس لئے یہ قاعدہ حاصل ہُوا کہ ایک پتلے مثلثی پتر کا مرکزِ جاذبہ اِس خط پر واقع ہوتا ہے جو کسی ضلع کے مرکز سے مقابل کے گوشہ تک کھینچا جائے اور اِس کا محل ضلع سے اِس خط کے ایک تہائی پر ہوتا ہے۔

کسی یکساں منشوری سلاخ کا مرکزِ جاذبہ اِس کے محور پر اِس کے طول کے وسط میں ہوتا ہے۔ ایک یکساں کرہ کا مرکزِ جاذبہ اِس کے ہندسی مرکز پر ہوتا ہے۔ ایک ٹھوس مخروط یا ہرم کا مرکزِ جاذبہ قاعدے کے مرکز کو راس سے ملانے والے خط پر، اور قاعدے سے اِس خط کے ایک چوتھائی پر واقع ہوتا ہے۔ قاعدے پر سے کھلے اور پتلے پتر کے موڑنے سے

بنے ہوئے ایک مخروط یا ہرم کا مرکزِ جاذبہ قاعدے کے مرکز کو راس سے ملانے والے خط پر اور قاعدے سے اِس خط کے ایک تہائی پر واقع ہوتا ہے۔

حساب سے مرکزِ جاذبہ کی وضع دریافت کرنے کا طریقہ :-

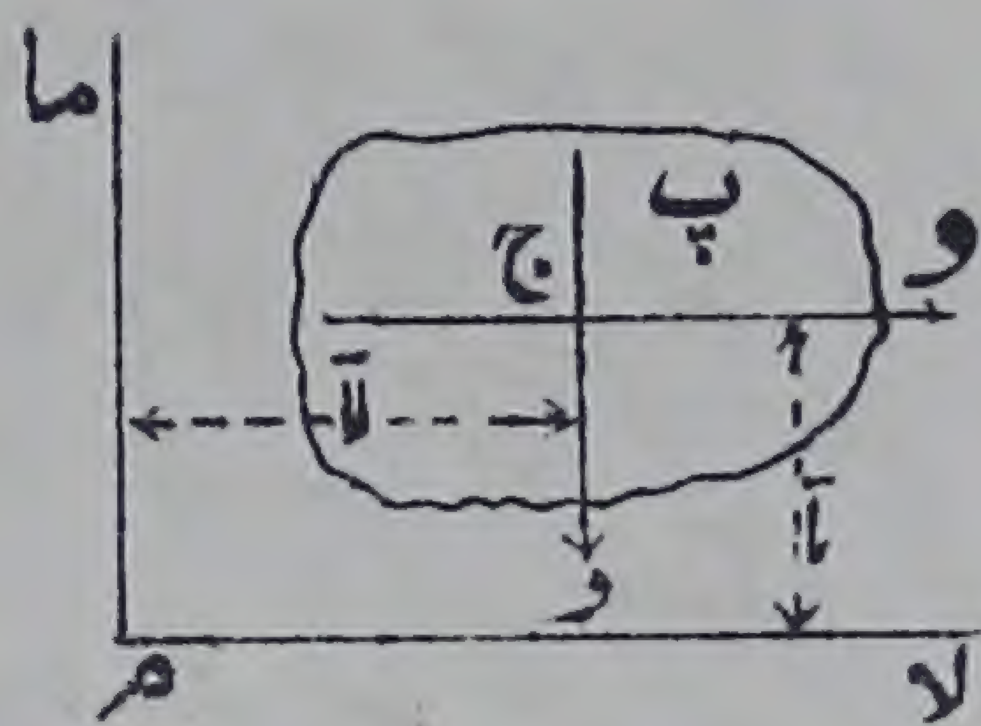
اگر کسی جسم کے مختلف ذرّوں کا وزن دیا ہو تو جس خط پر جسم کا مرکزِ جاذبہ واقع ہوتا ہے اُس کو دریافت کرنے کا مسئلہ عین جسم کے وزن کے خطِ عمل کا معلوم کرنا ہے۔

شکل ۱۲۲ میں ایک تپلا یکساں پتر کاغذ کے مستوی میں دکھایا گیا ہے۔ م لا اور م ما حوالے کے لئے اُفقی اور انتصابی محور ہیں۔ فرض کرو کہ پ پر واقع کسی ذرّے کے محدد لا۱ اور ما۱ ہیں۔ فرض کرو ذرّے کا وزن و۱ ہے۔ اِسی طرح جسم کے دیگر ذرّوں کو بھی متعین کرلو۔ تو

جسم کا حاصلِ وزن = و

= و۱ + و۲ + و۳ + وغیرہ

= ح و .... (۱)



شکل ۱۲۲ - ایک پتر کا مرکزِ جاذبہ

م کے گرد اثری معیار لو۔ فرض کرو کہ م ما اور و کے خطِ عمل میں اُفقی فاصلہ لاَ ہے تو

و لاَ = و۱ لا۱ + و۲ لا۲ + و۳ لا۳ + وغیرہ

∴ لاَ = ح و لا / و   (۲)

اب شکل کو گھماؤ یہاں تک کہ م لا انتصابی ہو جائے۔ اور پھر م کے گرد اثری معیار لو۔ فرض کرو کہ م لا اور و کے خطِ عمل میں فاصلہ آ ہے تو

و آ = و$_1$ ا$_1$ + و$_2$ ا$_2$ + و$_3$ ا$_3$ + وغیرہ

∴ آ = Σ و ا / و .... (۳)

م لا کے متوازی اور اِس سے فاصلہ آ پر ایک خط کھینچو۔ م ما کے متوازی اور اِس سے فاصلہ لآ پر ایک دُوسرا خط کھینچو۔ مرکزِ جاذبہ ج اِن دونوں خطوط کے نقطۂ تقاطع پر واقع ہے۔

بالعموم پتر زیرِ غور کو حِصّوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک کے لئے وزن و$_1$، و$_2$، و$_3$ وغیرہ، کا حساب لگایا جا سکتا ہے۔ اور مراکزِ جاذبہ (لا$_1$ ما$_1$)، (لا$_2$ ما$_2$)، وغیرہ، کے محدد پھر دیکھ کر لکھے جا سکتے ہیں۔

مثال ۱:— شکل ۱۲۳ میں جو پتلی یکساں تختی دکھلائی گئی ہے اُس کا مرکزِ جاذبہ دریافت کرو۔

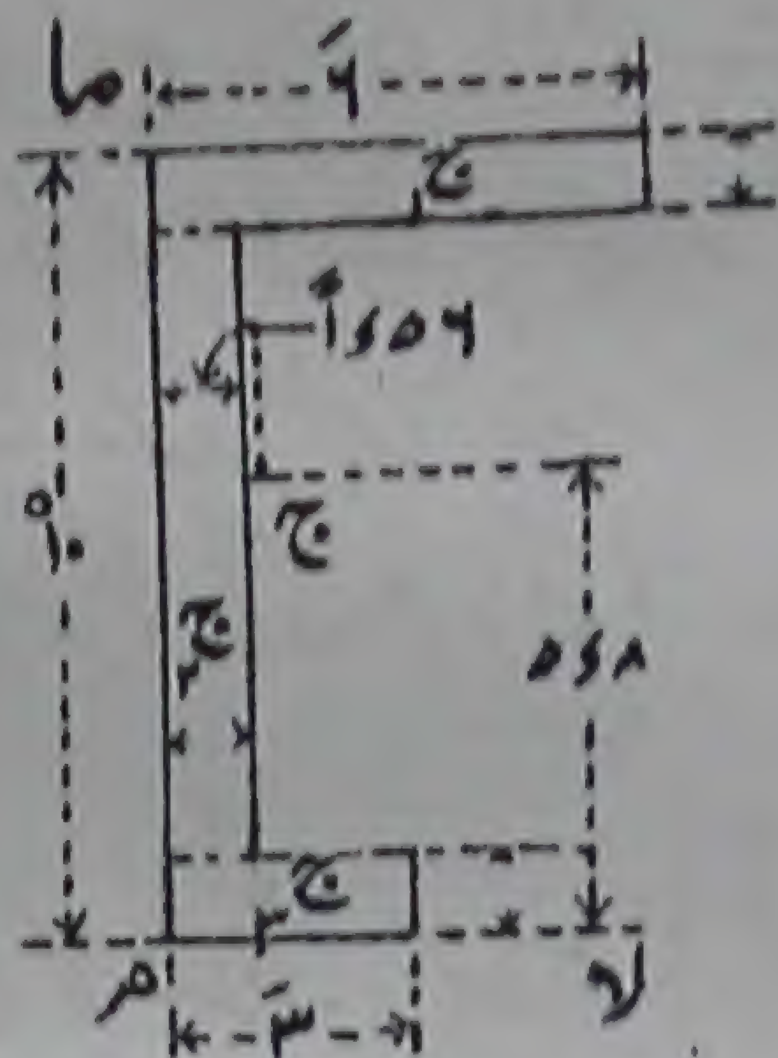
جیسا کہ شکل میں دکھایا ہے م لا اور م ما دو محور لو۔ اور فرض کرو کہ فی مربع اِنچ سطح تختی کا وزن و ہے۔ حساب میں سہولت کی غرض سے تختی کو تین مستطیلوں میں تقسیم کر دیا ہے جیسا کہ دکھلایا ہے۔ اِن کے فرداً فرداً مرکزِ جاذبہ ج$_1$، ج$_2$، ج$_3$ ہیں۔ م ما کے گرد اثری معیار لینے پر

و {(۱×۶)+(۱×۸)+(۱×۳)} لآ = و(۶×۱×۳) + و(۸×۱×½) + و(۳×۱×½)

لآ = ۲۶٫۵ / ۱۷

= ۱٫۵۶ اِنچ

حاصل ہُوا



شکل ۱۲۳

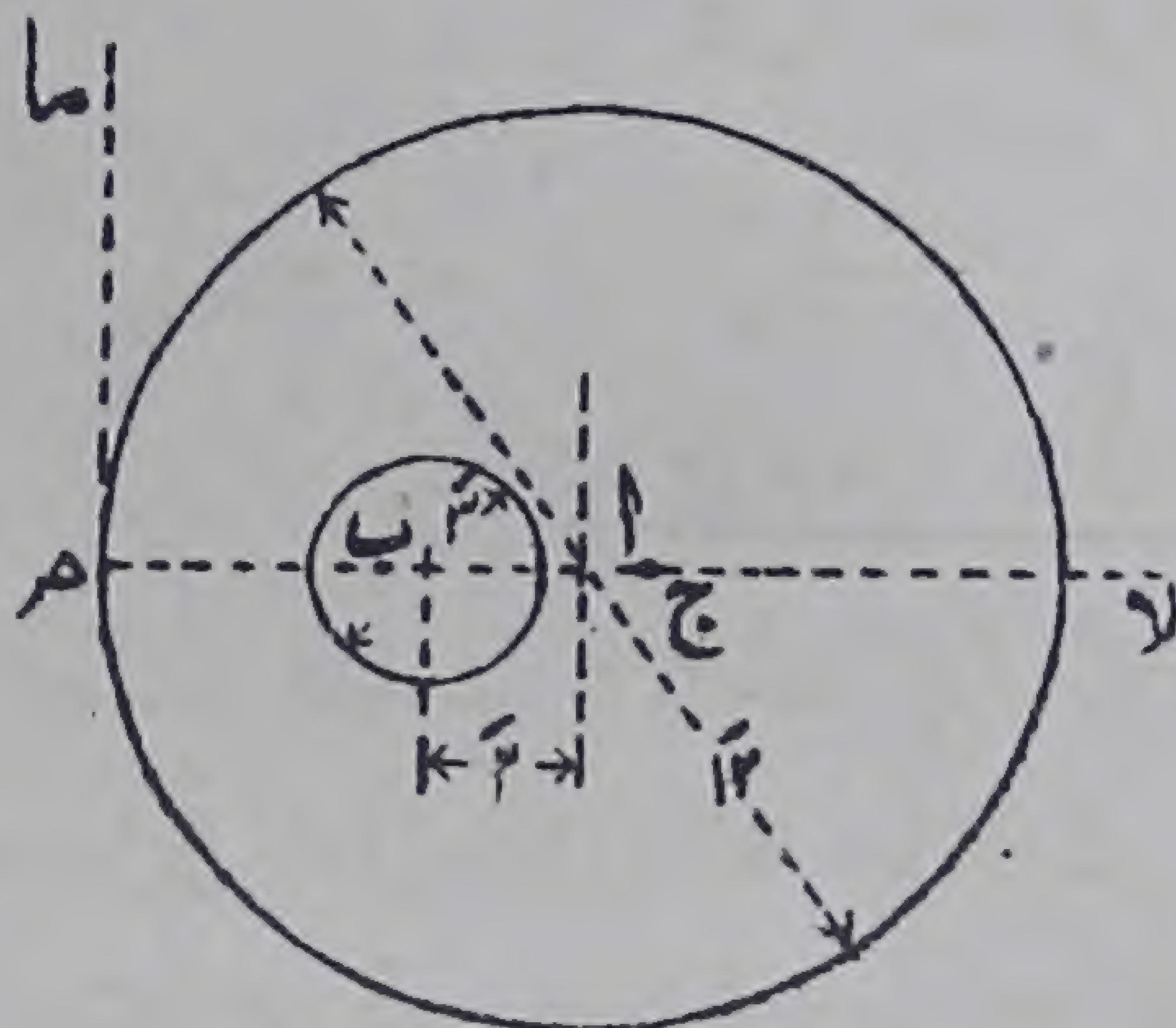
پھر م لا کے گرد معیارِ اثر لینے سے

۱۷ آ = (۱/۲ ۹ × ۱ × ۶) + (۵ × ۱ × ۸) + (۱/۲ × ۱ × ۳)

آ = ۹۸٫۵ / ۱۷

= ۵٫۸ انچ

مثال ۲ :- ایک مدور تختی [شکل ۱۲۴] میں جس کا قطر ۱۲ انچ ہے ۳ انچ قطر کا ایک سوراخ ہے۔ تختی کے مرکز ا اور سوراخ کے مرکز ب میں ۲ انچ کا فاصلہ ہے۔ تو مرکزِ جاذبہ دریافت کرو۔



شکل ۱۲۴

ا ب کو بڑھا کر اسے م لا مانو اور تختی کے محیط پر مماس کو م ما

قرار دو۔ یہ ظاہر ہے کہ ج، مرلا پر واقع ہے۔ مرما کے گرد معیار اثر لے کر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ بہ صورت موجودہ تختی کا معیارِ اثر، کامل قرص کے معیارِ اثر اور سوراخ کاٹنے میں علیحدہ شدہ حصّہ کے معیارِ اثر کے فرق کے مساوی ہے۔ فرض کرو کہ فی مربع اِنچ سطح کا وزن و ہے، تختی کا قطر ق اور سوراخ کا قطر س ہے۔ تو

کامل قرص کا وزن $= \frac{و\, \pi\, ق^۲}{۴}$

مقطوعہ حصہ کا وزن $= \frac{و\, \pi\, س^۲}{۴}$

بہ حالتِ موجودہ تختی کا وزن $= و\left(\frac{\pi\, ق^۲}{۴} - \frac{\pi\, س^۲}{۴}\right)$

$= \frac{و\,\pi}{۴}(ق^۲ - س^۲)$

مرما کے گرد معیارِ اثر لو اور فرض کرو کہ مرج $= \bar{لا}$

تو $\frac{و\,\pi}{۴}(ق^۲ - س^۲)\,\bar{لا} = \left(و\,\frac{\pi\, ق^۲}{۴} \times ۶\right) - \left(و\,\frac{\pi\, س^۲}{۴} \times ۴\right)$

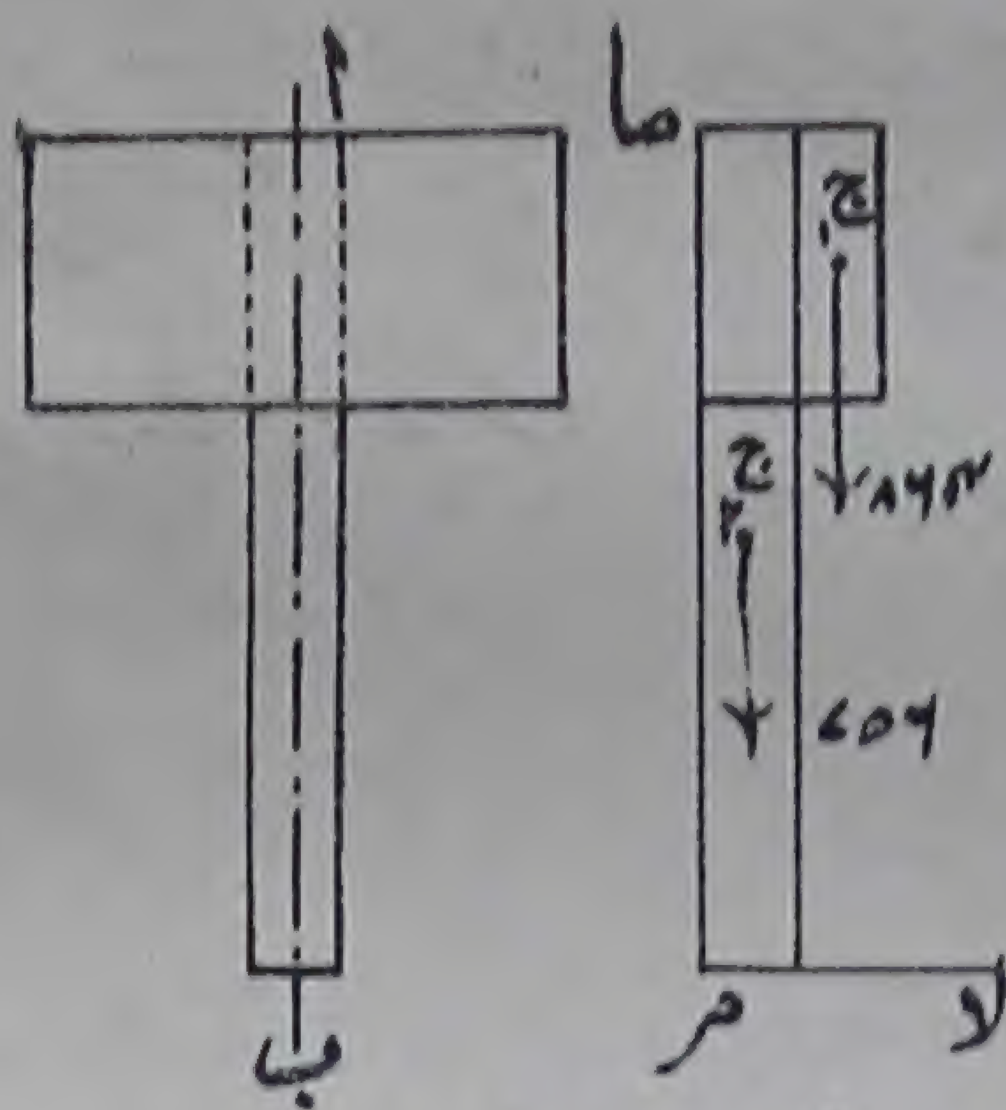
$(ق^۲ - س^۲)\,\bar{لا} = ۶ق^۲ - ۴س^۲$

$\bar{لا} = \frac{۶ق^۲ - ۴س^۲}{ق^۲ - س^۲}$

$= \frac{۸۲۸}{۱۳۵}$

$=$ ۶٫۱۳ اِنچ

مثال ۳ :۔ ۳ فٹ چوڑا اور ۲ فٹ اُونچا ایک تختۂ اعلان جو ایک اِنچ موٹی لکڑی کا بنا ہے ، ۶ فٹ اُونچی ایک تھونی پر لگا ہوا ہے جو خود ۳ اِنچ در ۳ اِنچ کی اِسی قسم کی لکڑی سے بنی ہے (شکل ۱۲۵)۔ مرکزِ جاذبہ دریافت کرو۔



شکل ۱۲۵

ٹھونی اور تختے کے حجم اُن کے وزنوں کے تناسب ہیں۔ اِس لئے اِن کے وزنوں کی بجائے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔

تختہ کا وزن (۳۶ × ۲۴ × ۱) = ۸۶۴ کے تناسب ہے۔

ٹھونی کا وزن (۸۴ × ۳ × ۳) = ۷۵۶ کے تناسب ہے۔

مجموعی وزن

(۸۶۴ + ۷۵۶) = ۱۶۲۰ کے تناسب ہے۔

تختے اور ٹھونی دونوں کے مرکزِ جاذبہ اور اِس لئے کل کا مرکزِ جاذبہ اُس مستوی میں واقع ہے جس کا نقش ا ب ہے (شکل ۱۲۵)۔

م کے گرد اثری معیار لو۔

۱۶۲۰ لآ = (۳٫۵ × ۸۶۴) + (۱٫۵ × ۷۵۶)

∴ لآ = $\frac{۱۱۳۴ + ۳۰۲۴}{۱۶۲۰}$

= ۲٫۵۶۶ انچ

نیز ۱۶۲۰ اَ = (۷۲ × ۸۶۴) + (۴۲ × ۷۵۶)

∴ اَ = $\frac{۳۱۷۵۲ + ۶۲۲۰۸}{۱۶۲۰}$

= ۵۸ انچ

پس مرکز جاذبہ انتصابی مستوی ا ب میں واقع ہے اور ۵۸ انچ کی بلندی پر ٹھونی کی پشت سے ۲ء۵۶۶ انچ پر واقع ہے۔

مثال ۴ :- ایک مربع کے گوشوں ا، ب، س، د پر و۱، و۲، و۳ اور و۴ وزن کے جسم رکھے ہوئے ہیں (شکل ۱۲۶) مرکز جاذبہ دریافت کرو۔

پہلے و۱ اور و۲ کا مرکز جاذبہ ج۱ دریافت کرو۔ ج۱ خط ا ب پر واقع ہے اور اس کو تناسب ذیل میں تقسیم کرتا ہے:-

شکل ۱۲۶

$$\frac{\text{ا ج}_1}{\text{ب ج}_1} = \frac{\text{و}_2}{\text{و}_1}$$

اس طرح و۳ اور و۴ کا مرکز جاذبہ س د پر واقع ہے اور س د کو ذیل کے تناسب میں تقسیم کرتا ہے۔

$$\frac{\text{س ج}_2}{\text{د ج}_2} = \frac{\text{و}_4}{\text{و}_3}$$

کُل نظام کا مرکز جاذبہ ج۱ ج۲ پر واقع ہے۔

و۲ اور و۳ کا مرکز جاذبہ ب س کو اس تناسب میں تقسیم کرتا ہے کہ

$$\frac{\text{ب ج}_3}{\text{س ج}_3} = \frac{\text{و}_3}{\text{و}_2}$$

نیز و۱ اور و۴ کا مرکز جاذبہ ا د کو اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ

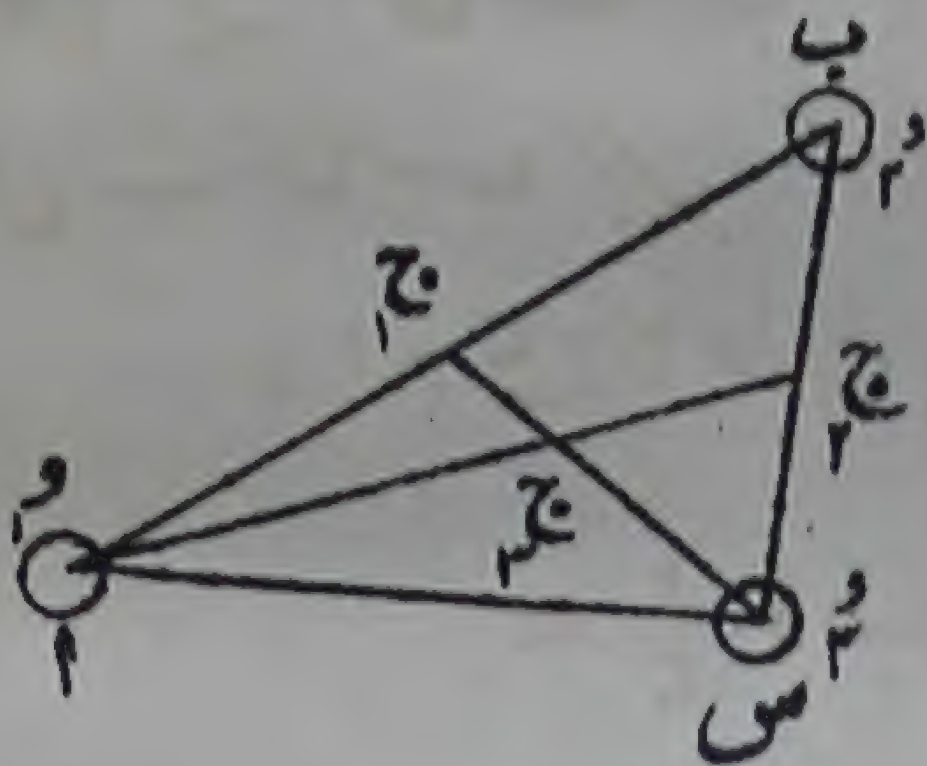
$$\frac{\text{ا ج}_4}{\text{د ج}_4} = \frac{\text{و}_4}{\text{و}_1}$$

کُل نظام کا مرکز جاذبہ ج۳ ج۴ میں واقع ہے۔ پس ج خطوط ج۱ ج۲ اور ج۳ ج۴ کے تقاطع پر واقع ہے۔ اس مسئلہ کی تکمیل کے لئے پیمانے کے مطابق ایک نقشہ بنایا جا سکتا ہے۔

مثال ۵ :- کسی مثلث ا ب س کے گوشوں پر مساوی

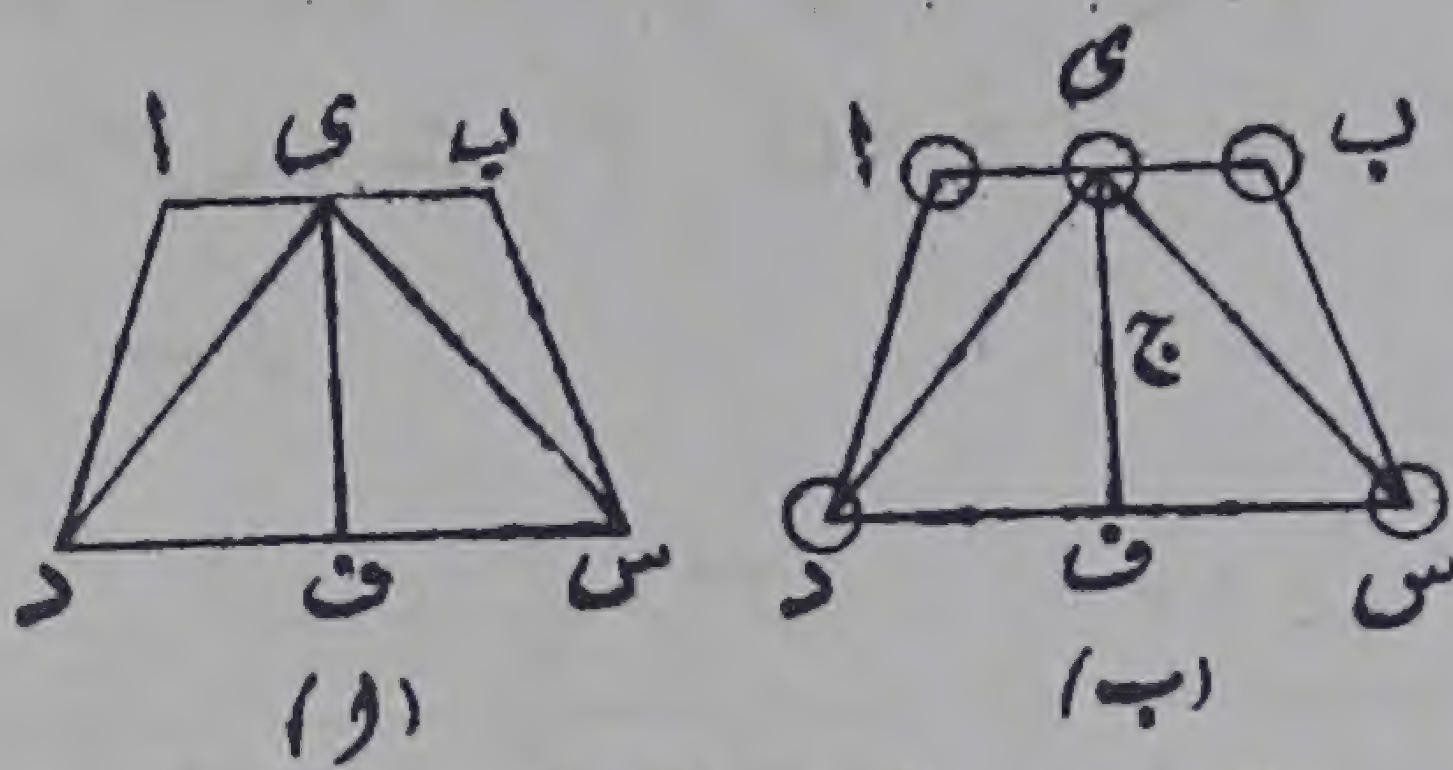
وزن و۱، و۲ اور و۳ رکھے ہیں (شکل ۱۲۷)۔ مرکزِ جاذبہ دریافت کرو۔

و۱ اور و۲ کا مرکزِ جاذبہ ج۱ ضلع ا ب کی تنصیف کرتا ہے اور کُل نظام کا مرکزِ جاذبہ س ج پر واقع ہے۔ نیز و۲ اور و۳ کا مرکزِ جاذبہ ج۲ ضلع ب س کی تنصیف کرتا ہے اور کُل نظام کا مرکزِ جاذبہ ج خط ا ج۲ پر واقع ہے۔ پس ج اِن دو خطوط کے تقاطع پر واقع ہے جو دو ضلعوں کے مرکزوں سے مثلث مقابل کے راسوں تک کھینچے جاتے ہیں۔ اور اس لئے مثلث کی سی شکل رکھنے والے ایک پتلے پتر کے مرکزِ جاذبہ سے منطبق ہے۔



شکل ۱۲۷

مثال ۶:۔ شکل ۱۲۸ (ا) میں ا ب س د ایک پتلا پتر ہے۔ ا ب اور س د متوازی ہیں۔ مرکزِ جاذبہ دریافت کرو۔ [یہ ایسی صورت ہے جس سے اکثر و بیشتر سابقہ پڑتا ہے]۔



شکل ۱۲۸ ۔ مرکزِ جاذبہ کی ایک معروف صورت

پتر کو ا ب کے متوازی پتلی پتلی پٹّیوں میں تقسیم شدہ تصور کرو۔ ہر پٹّی کا مرکزِ جاذبہ ی ف میں واقع ہے جو ایک خطِ مستقیم ہے جو ا ب اور س د دونوں کی تنصیف کرتا ہے اور اس لئے ہر پٹّی کی تنصیف

کرتا ہے۔ د ی اور س ی کو ملاؤ۔ اور اس طرح پتر کو تین مثلث ا د ی، ب س ی، اور د ی س میں تقسیم کرو۔ چونکہ یہ مثلث ہم ارتفاع ہیں اِس لئے اِن کے رقبے اور بنابریں اِن کے وزن اِن کے قاعدوں کے متناسب ہیں اِس طرح کہ۔

△ ا د ی کا وزن : △ ب س ی کا وزن : △ د ی س کا وزن

= $\frac{1}{2}$ اب : $\frac{1}{2}$ اب : دس

مثال بالا نمبر ۵ میں جو مسئلہ بیان کیا گیا ہے اُس کی مدد لے کر ہر مثلث کا وزن تین مساوی حصّوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے اور مثلث کے مرکزِ جاذبہ کی وضع بدلے بغیر ہر حصّہ مثلث کے ایک ایک گوشہ پر رکھا جا سکتا ہے۔ وزنوں کا معادِل نظام حسبِ ذیل ہوگا [شکل نمبر ۱۲۸ (ب)]۔

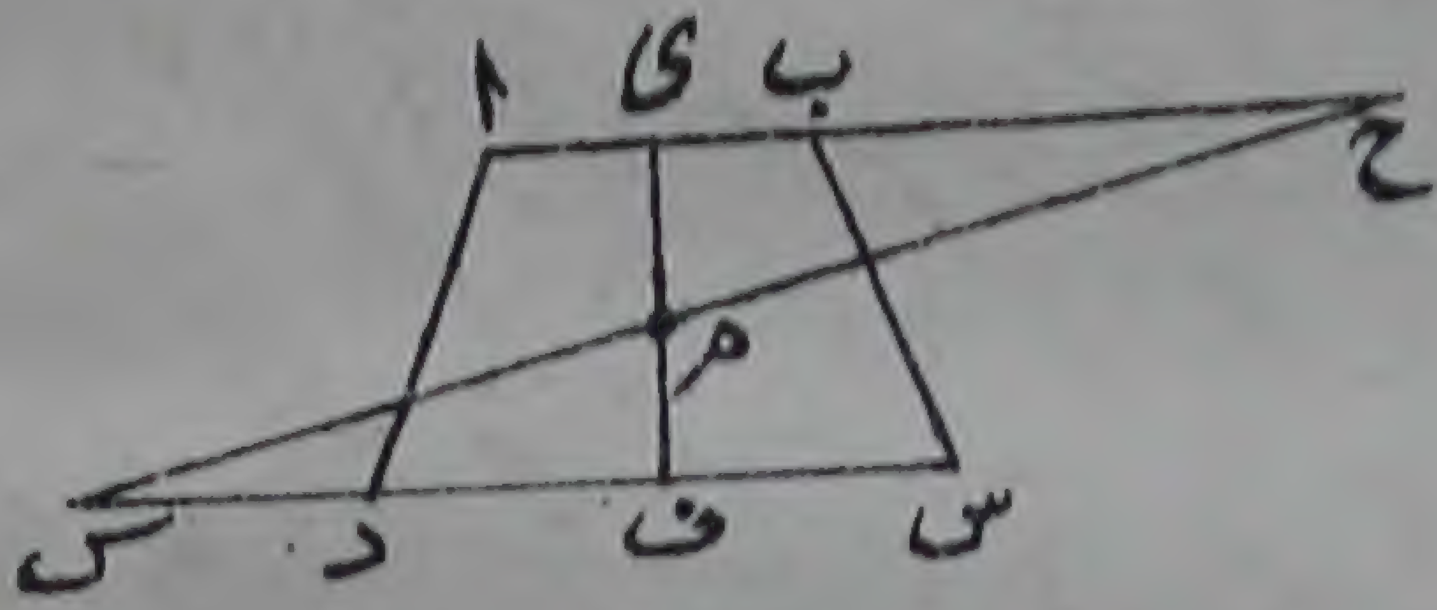
ا پر $\frac{1}{6}$ اب، ب پر $\frac{1}{6}$ اب، ی پر ($\frac{2}{6}$ اب + $\frac{1}{3}$ دس)، س پر ($\frac{1}{6}$ اب + $\frac{1}{3}$ دس)، د پر ($\frac{1}{6}$ اب + $\frac{1}{3}$ دس)

ا، ی اور ب پر کے وزنوں کا مرکزِ جاذبہ ی پر واقع ہے۔ اور اِن وزنوں کا حاصل ($\frac{2}{6}$ اب + $\frac{2}{6}$ اب + $\frac{1}{3}$ دس) = $\frac{4}{6}$ اب + $\frac{1}{3}$ دس ہے۔ س اور د کے وزنوں کا مرکزِ جاذبہ ف پر واقع ہے اور اِن وزنوں کا حاصل ($\frac{2}{6}$ اب + $\frac{2}{3}$ دس) ہے۔ کل نظام کا مرکزِ جاذبہ، ی ف کو اِس تناسب میں تقسیم کرتا ہے کہ

$$\frac{\text{ف ج}}{\text{ی ج}} = \frac{\frac{4}{6}\,\text{اب} + \frac{1}{3}\,\text{دس}}{\frac{2}{6}\,\text{اب} + \frac{2}{3}\,\text{دس}} = \frac{2\,\text{اب} + \text{دس}}{\text{اب} + 2\,\text{دس}}$$

— — — — — (۱)

اِس صورت میں حسب ذیل ترسیمی طریقہ [شکل نمبر ۱۲۹] بھی مفید ہے: حسبِ سابق ی ف کھینچو۔ اب اور س د کو علی الترتیب ح اور ک تک بڑھاؤ۔ ب ح = س د اور د ک = اب



شکل ۱۲۹

بناؤ ۔ ح ک کو ملاؤ جو ی ف کو م پر قطع کرے ۔ مثلث ی م ح اور ف م ک متشابہ ہیں اِس لئے

$$\frac{\text{ف م}}{\text{ی م}} = \frac{\text{ف ک}}{\text{ی ح}} = \frac{\text{د ک + ف د}}{\text{ی ب + ب ح}}$$

$$= \frac{\text{ا ب} + \frac{1}{2}\,\text{د س}}{\frac{1}{2}\,\text{ا ب} + \text{د س}}$$

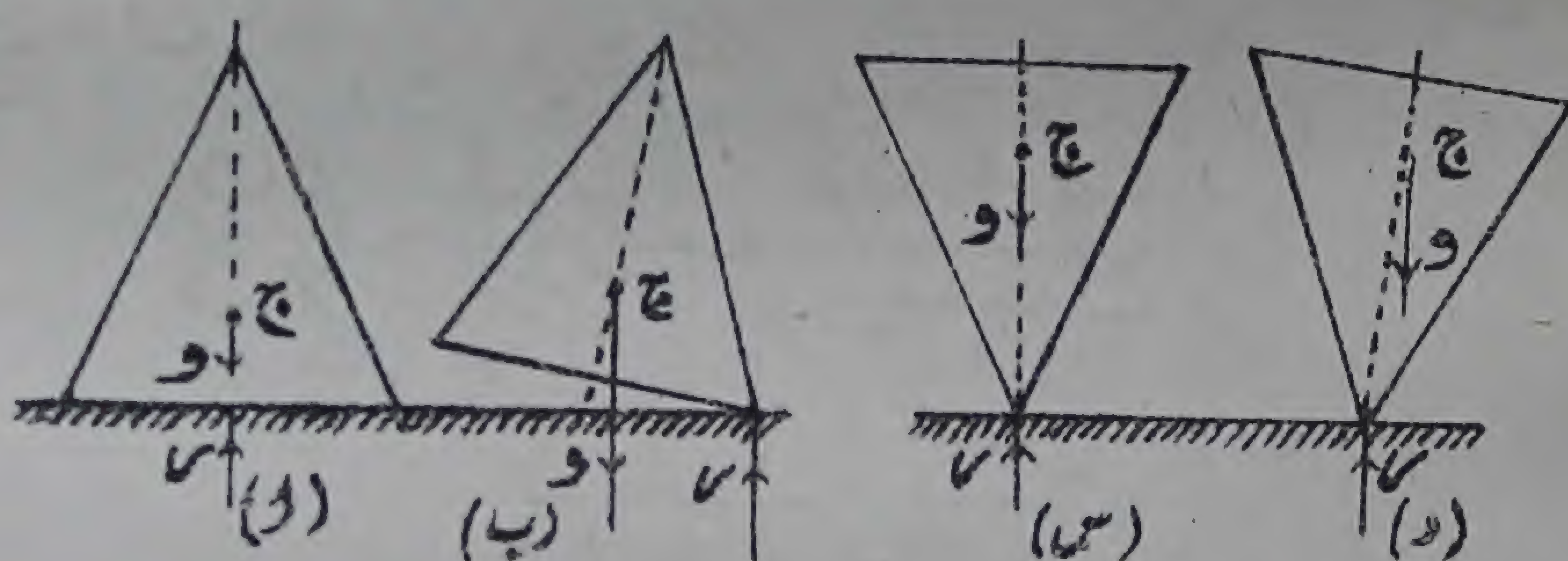
$$= \frac{\text{۲ ا ب + د س}}{\text{ا ب + ۲ د س}} \qquad ----------\ (۲)$$

چونکہ یہ نتیجہ وہی ہے جو (۱) میں ج کی وضع کے لئے دریافت کیا گیا تھا اِس لئے معلوم ہُوا کہ م اور ج ایک ہی ہیں ۔ پس شکل ۱۲۹ میں پتر کا مرکزِ جاذبہ دریافت کرنے کا ایک خالص ترسیمی طریقہ بتلایا گیا ہے ۔

کسی جسم کے توازن کی حالتیں :۔

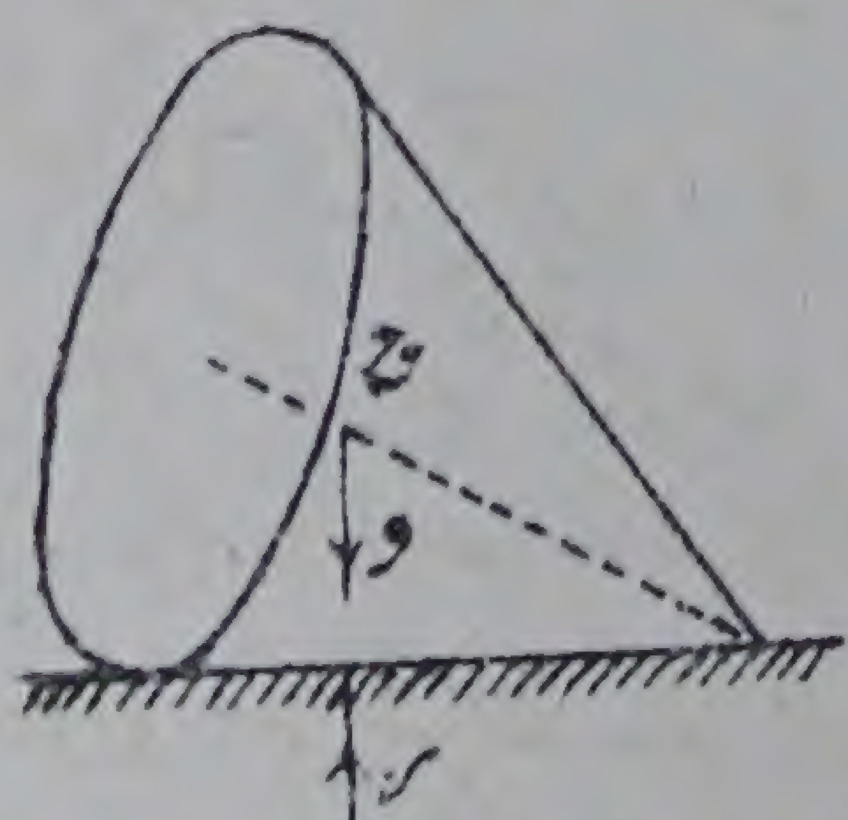
جب ایک جسم قوتوں کے ایک نظام کے زیرِ عمل حالتِ سکون میں ہوتا ہے تو اُس کا توازن قائم یا غیر قائم کہلاتا ہے بہ لحاظ اِس کے کہ وہ تھوڑی سی جنبش دیئے جانے پر اپنی اصلی وضع پر عود کر سکتا ہے یا نہیں ۔ اگر جسم ہر وضع میں حالتِ سکون میں رہے تو توازن تعدیلی کہلاتا ہے ۔ جب ایک جسم جاذبہ اور سہاروں کی قوتوں کے زیرِ عمل ہوتا ہے تو علاوہ دیگر شرائط کے اِس کی حالتِ توازن مرکزِ جاذبہ کے محل پر منحصر ہوتی ہے ۔

ایک مخروط توازن کی ہر سہ صورتیں اختیار کرسکتا ہے۔ شکل ۱۳۰ (ا) میں مخروط ایک اُفقی میز پر اپنے قاعدے کے بل رکھا ہوا ہے اگر تھوڑی سی جنبش دی جائے [شکل ۱۳۰ (ب)] تو مرکز جاذبہ ج پر عاملہ قوت و اور میز کے ردِ عمل ر کا تقاضا یہ ہوگا کہ وہ مخروط کو اصلی وضع میں لے آئیں پس شکل ۱۳۰ (ا)



شکل ۱۳۰۔ قائم اور غیر قائم توازن

میں توازن قائم توازن ہے۔ شکل ۱۳۰ (س) میں مخروط اس کے بل رکھا ہو تو توازن میں ہے۔ ذرا سی جنبش بھی [۱۳۰ (د)] و اور ر کو متوازی خطوں میں لے آئیگی اور وہ دونوں مل کر مخروط کو تہ و بالا کر دینگے۔ شکل ۱۳۰ (س) میں اسی وجہ سے توازن غیر قائم ہے۔ شکل ۱۳۱ میں مخروط اپنے پہلو کے بل اُفقی میز پر رکھا ہے۔ اس صورت میں و اور ر کے لئے یہ ناممکن ہے کہ وہ ایک ہی انتصابی خط کے علاوہ دوسرے خطوں میں عمل کریں خواہ پہلو کے بل رکھے رہنے کی حالت میں مخروط کو کتنا ہی کیوں نہ پھرایا جائے۔

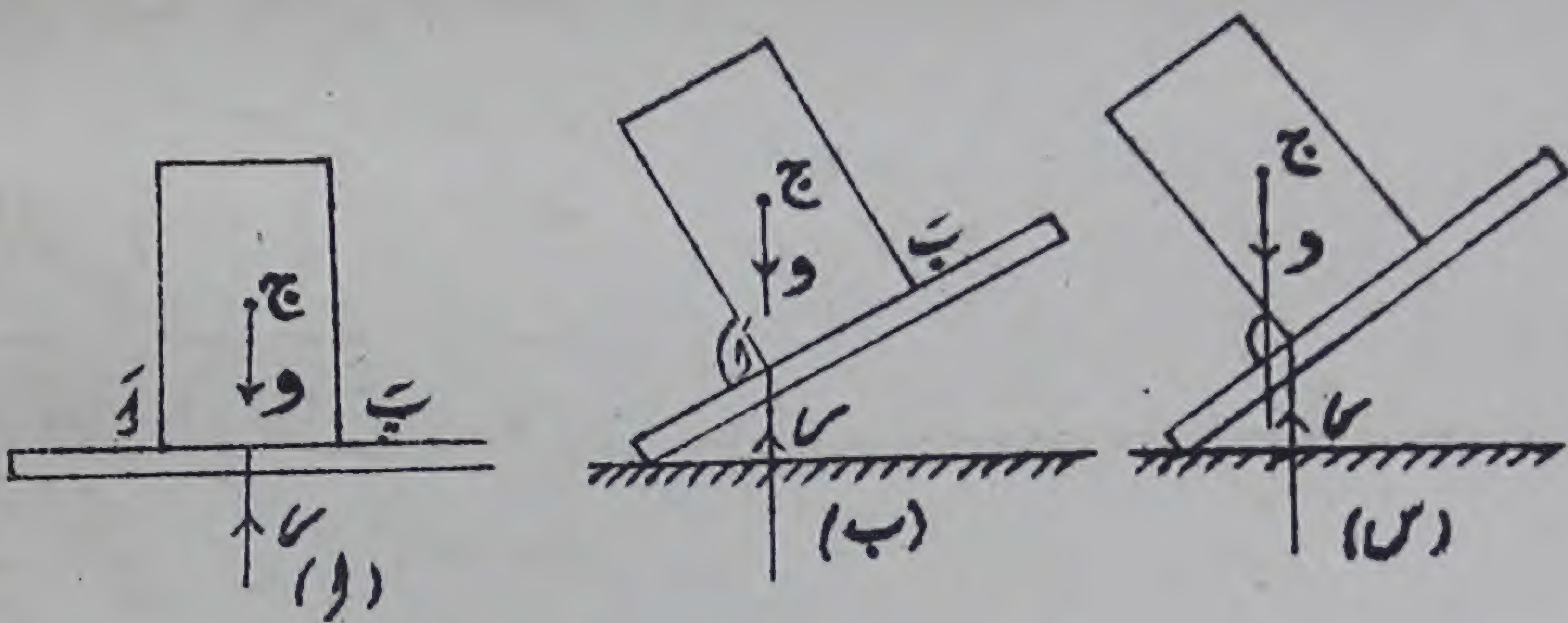


شکل ۱۳۱۔ تعدیلی توازن

پس توازن تعدیلی ہُوا۔

ایک کُرہ اگر اُفقی میز پر رکھا ہو تو وہ بھی تعدیلی توازن میں ہوتا ہے بشرطیکہ مرکزِ جاذبہ ہندسی مرکز سے منطبق ہو۔ ایک اُستوانہ اگر اپنی سطح منحنی کے بل اُفقی میز پر رکھا ہو تو جہاں تک کہ لڑھکانے کے عمل کا تعلق ہے وہ بھی تعدیلی توازن میں ہوتا ہے بشرطیکہ مرکزِ جاذبہ اُستوانے کے محور پر واقع ہو۔

شکل ۱۳۲ (ا) میں ایک مستطیل کُندہ ایک اُفقی تختے پر رکھا ہے جس کا ایک سرا اُٹھایا جا سکتا ہے۔ ج سے گزرتا ہُوا انتصابی سطح تماس اَب کے اندر ہی رہتا ہے اور و اور ردِّ عمل ر کے تحت توازن قائم ہوتا ہے۔ یہ امر محال ہے کہ



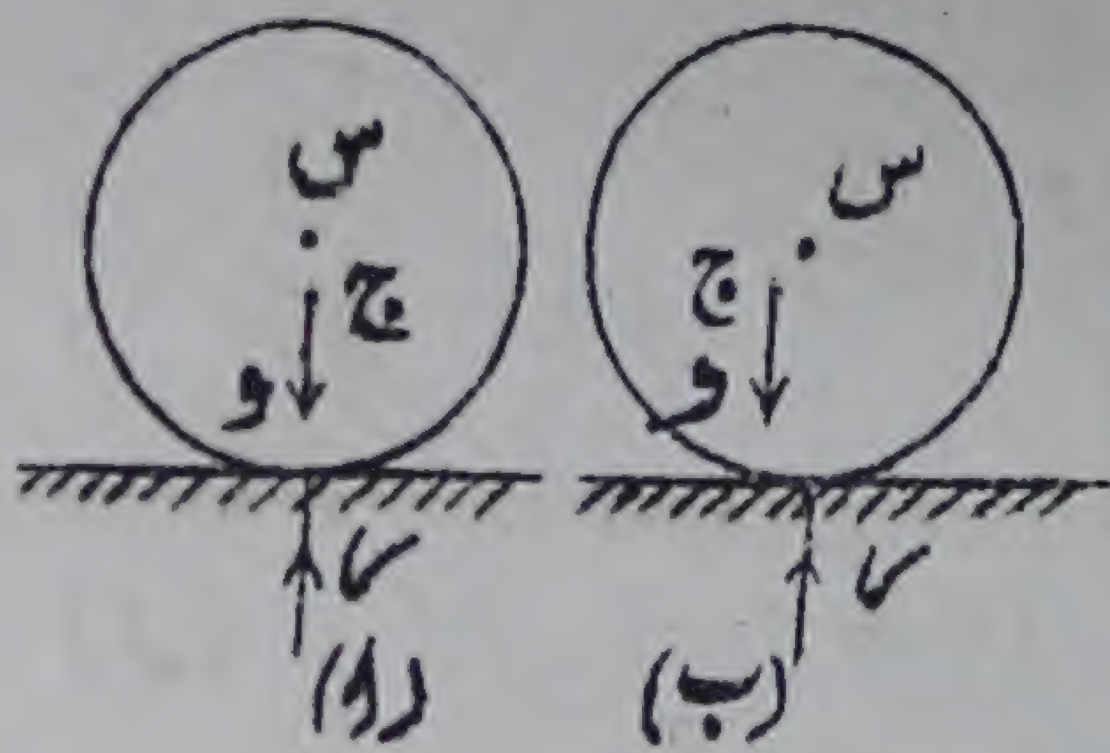
شکل ۱۳۲۔ ایک سطح مائل پر ایک کُندے کا قیام

ر کا عمل اَب سے باہر بھی ہو۔ پس توازنِ قائم کا امکان ٹھیک اُس وقت ختم ہو جاتا ہے جب کہ تختہ ایسے زاویے پر مائل ہو کہ ج سے گزرنے والا انتصابی اَ میں سے گزرے [شکل ۱۳۲ (ب)]۔ یہ سمجھ لیا گیا ہے کہ کُندے کے پھسلنے کو روکنے کے لئے اَ پر کوئی نہ کوئی ذریعہ اختیار کیا گیا ہے۔ اگر تختہ زیادہ مائل زاویے پر جُھکایا جائے [شکل ۱۳۲ (س)] تو ر اور و مل کر کُندے کو اُلٹ

دیتے ہیں۔

واضح رہے کہ جب ایک جسم توازنِ قائم کی وضع میں ہوتا ہے تو جھٹکے سے جُنبش دینے کا یہ اثر ہوتا ہے کہ مرکزِ جاذبہ اُوپر اُٹھ جاتا ہے۔ مزید براں اگر ایک جسم تجاذبی قوت کے زیرِ عمل حرکت کرسکتا ہے تو وہ ہمیشہ اِس طرح حرکت کریگا کہ مرکزِ جاذبہ پہلے سے زیادہ نیچے اُتر آئے۔ قائم توازن کی وضع اُس وقت پیدا ہو جاتی ہے جب کہ [مثل رقّاص کے] مرکزِ جاذبہ اپنی پست ترین ممکنہ وضع پر پہنچ جاتا ہے۔

شکل ۱۳۳ (ا) میں ایک کُرہ دکھایا گیا ہے۔ جس کا ہندسی مرکز س ہے اور جس کا مرکزِ جاذبہ ج ہے۔ مرکزِ جاذبہ کا یہ ہٹاؤ اِس طرح ممکن ہے کہ یا تو ایک بھاری ڈاٹ نیچے والے نصف کُرے میں لگا دی جائے یا اُوپر والے نصف کُرے سے ایک قاش اُتار لی جائے۔ کُرہ ایک اُفقی میز پر رکھا ہے اور اگر س اور ج دونوں ایک ہی انتصابی پر ہوں، تو کُرہ توازن میں ہوگا۔ اِس وقت



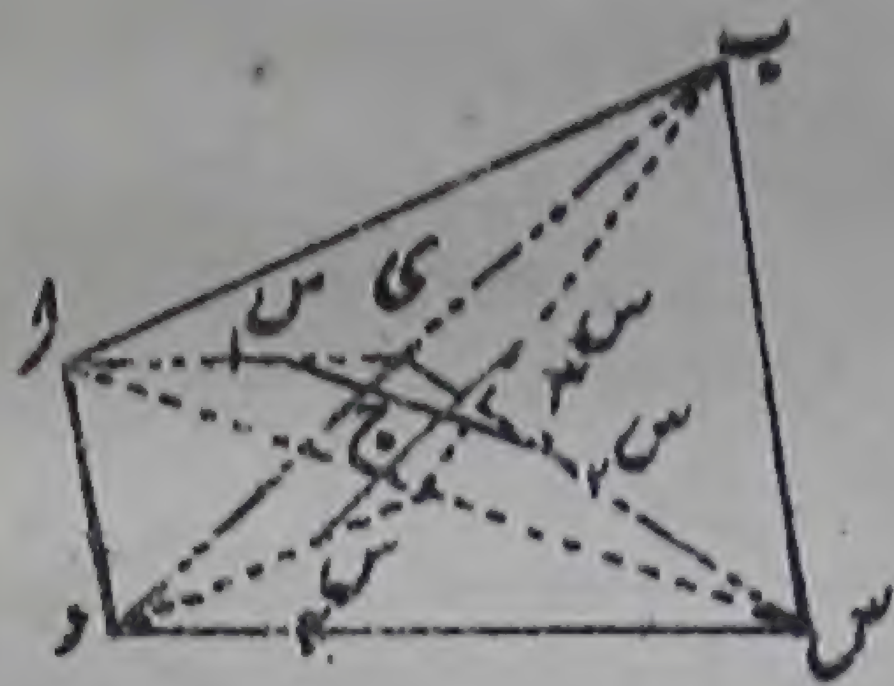
شکل ۱۳۳۔ بوجھ دار کُرہ کی قائمیت

ردِّ عمل ر اور وزن و دونوں ہم خط ہونگے۔ اگر ذرا سی جُنبش دی جائے [شکل ۱۳۳ (ب)] تو ر اور و دونوں مِل کر کُرے کو اصلی وضع میں لے آئینگے۔ پس یہ وضع قائم توازن کی ہے۔

ایک پتلے پتر کا مرکزِ جاذبہ دریافت کرنے کا تربیتی طریقہ:- پتر اب س د (شکل ۱۳۴) ذوارلبعۃ الاضلاع ہے اور احتیاط کے

ساتھ پیمانے پر بنایا گیا ہے۔ ب د کو ملا کر پتر کو دو مثلثوں میں تقسیم کرو۔ ب د کو ی پر تنصیف کرو۔ ا ی اور س ی کو ملاؤ۔ ی س۱ = $\frac{1}{3}$ ا ی بناؤ۔ اور ی س۲ = $\frac{1}{3}$ ی س بناؤ۔

تو س۱ اور س۲ علی الترتیب مثلث ا ب د اور س ب د کے مرکزِ جاذبہ ہیں۔ س۱ س۲ کو ملاؤ۔ تو پتر کا مرکزِ جاذبہ س۱ س۲ پر واقع ہوگا۔ پھر ا س کو ملا کر پتر کو تقسیم کرو اور اُسی طریقے سے مثلث ا ب س اور ا د س کے مرکزِ جاذبہ س۳ اور س۴ معلوم کرو۔



شکل ۱۳۴۔ عمل کے ذریعہ سے مرکزِ جاذبہ

تو مرکزِ جاذبہ ج خطوط س۱ س۲ اور س۳ س۴ کے تقاطع پر واقع ہوگا۔

شکل ۱۳۵ (ا) میں پتر کا گھیرا منحنی ہے۔ اِس گھیرے کے سب سے نیچے نقطے ھ پر مَس کرتا ہوا ایک خط ھ لا بطور ایک حوالے کے محور کے مان لو اور دُوسرا محور ھ ما اِس سے ۹۰° کا زاویہ بناتا ہُوا کھینچو۔ ھ لا کے متوازی ا ب کھینچو جو گھیرے کو سب سے اُونچے نقطے پر مَس کرے۔ فرض کرو کہ ھ لا اور ا ب کے درمیان عمودی فاصلہ ہ ہے۔ س د ایک بہت ہی پتلی پٹی ہے جو ھ لا کے متوازی ہے اور اِس سے فاصلہ ما پر ہے اور جس کی چوڑائی جف ما ہے۔ اِس پٹی کا رقبہ وزن کے تناسب ہے اور س د جف ما کے مساوی ہے۔ ھ لا کے گرد اِس کا معیارِ اثر س د × جف ما × ما ہے۔ ا ب پر س ی اور د ف عمود کھینچو۔ ی ھ اور ف ھ کو ملاؤ جو س د کو ح اور ک پر قطع کریں۔ متشابہ مثلث ھ ح ک اور ھ ی ف میں

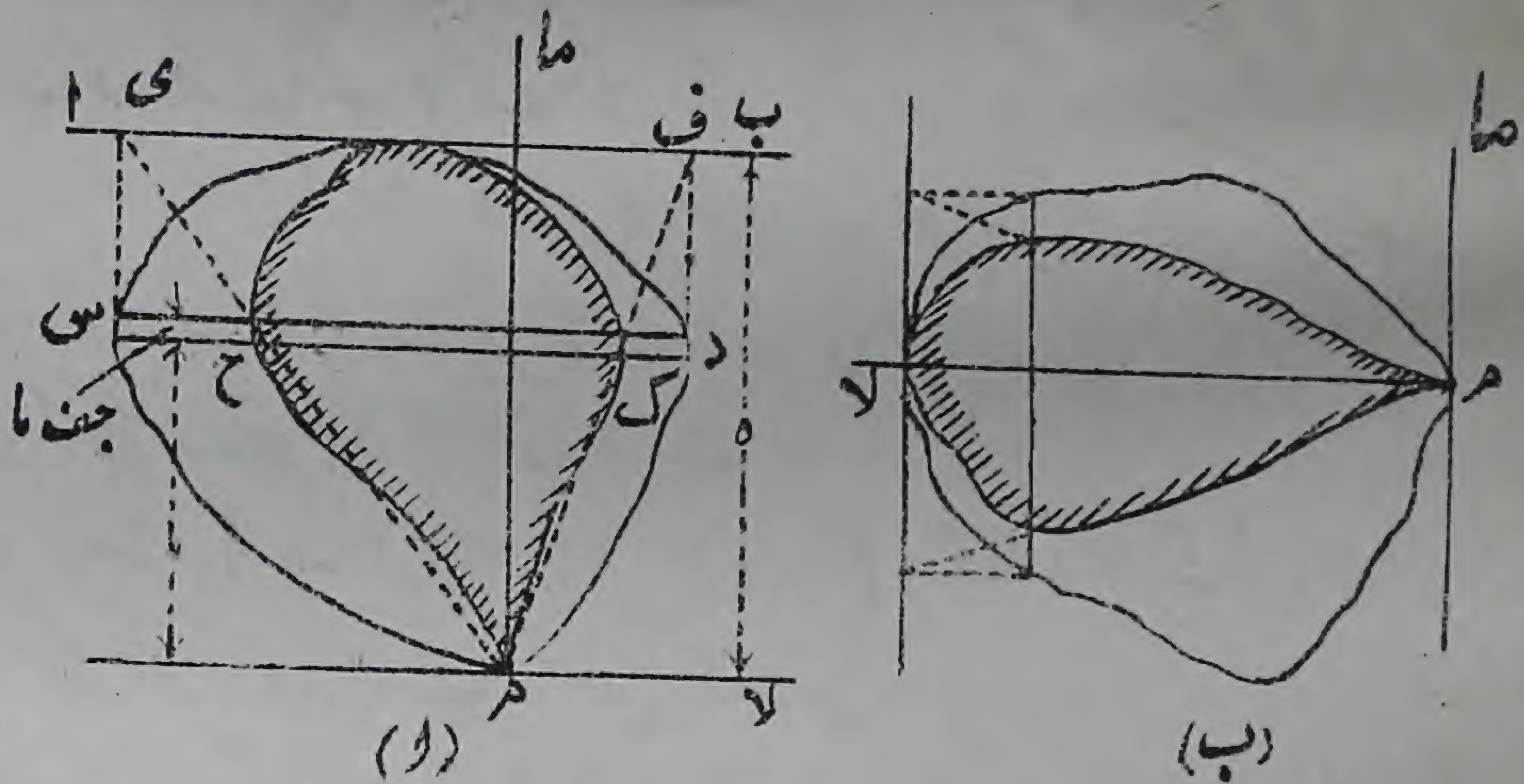
ح ک : ی ف = ما : ہ

∴ ح ک × ہ = ی ف × ما = س د × ما

ہر طرف کو جف ما سے ضرب دو جس سے

ح ک × جف ما × ہ

= س د × جف ما × ما حاصل ہُوا۔



شکل ۱۳۵ ۔ ایک پتر کے مرکزِ جاذبہ کے دریافت کرنے کا ترسیمی طریقہ

اِس مساوات سے ظاہر ہوتا ہے کہ پٹی ح ک کے رقبے اور ہ کا حاصل ضرب پٹی س د کے معیارِ اثر کے مساوی ہے۔ اِس جیسی دُوسری پٹی کے لئے بھی ایسا ہی نتیجہ حاصل ہوسکتا ہے۔ پس اگر ح اور ک جیسے متعدد نقطے دریافت کئے جائیں اور ایک منحنی اِن میں سے گزرتا کھینچا جائے تو اِس منحنی کے رقبے [شکل ۱۳۵ (ا) میں سایہ دار حصہ] کو جب مستقل ہ سے ضرب دیا جائیگا تو س د جیسی تمام اُن پٹیوں کا مجموعی معیارِ اثر معلوم ہو جائیگا جن میں پتر کو تقسیم کیا جائے۔ فرض کرو کہ دیئے ہوئے پتر اور سایہ دار منحنی کے رقبے علی الترتیب $ا_1$ اور $ا_2$ ہیں۔ [اِن رقبوں کو ایک سطح پیما سے دریافت کر سکتے ہیں] اور فرض کرو کہ م لا سے مرکزِ جاذبہ کا فاصلہ $\bar{ما}$ ہے تو

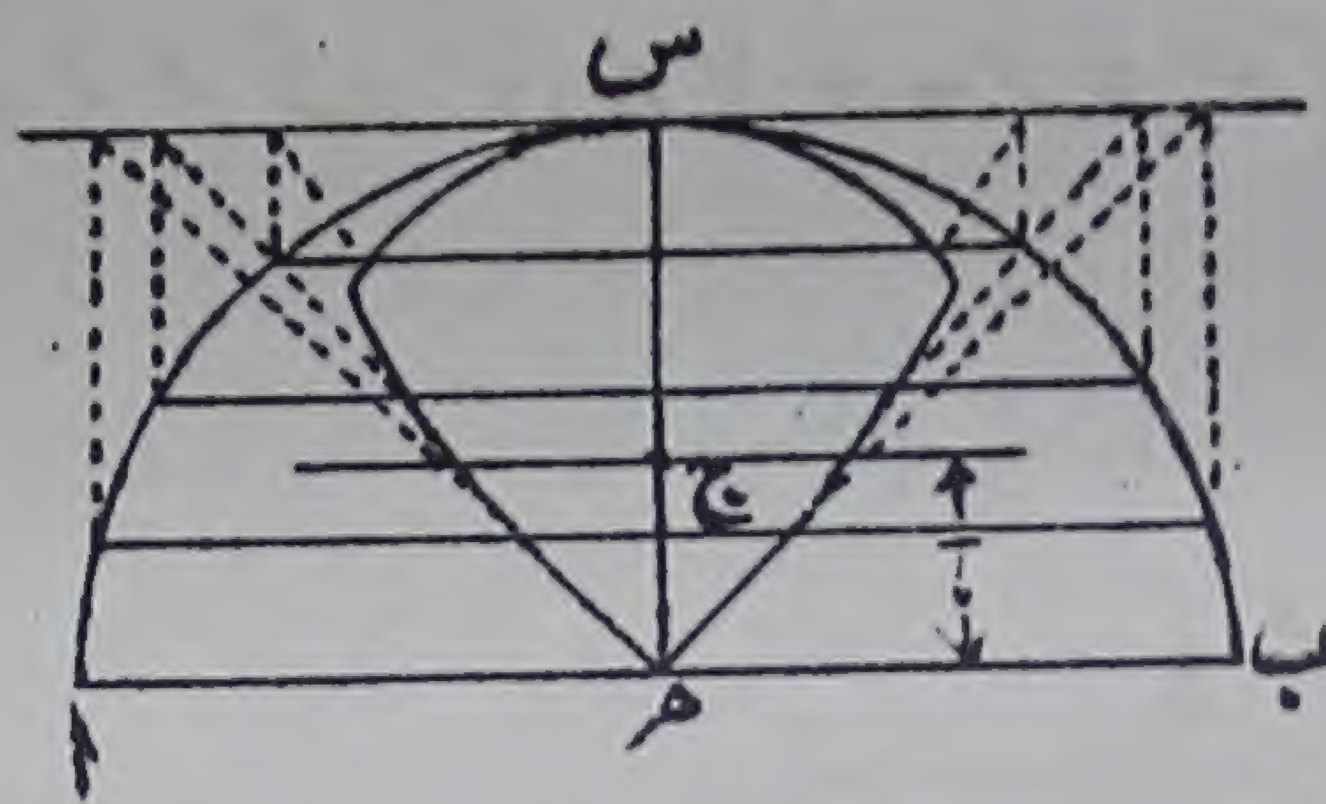
$$ا_1 \, \bar{ما} = ا_2 \, ہ$$

$$\text{یا} \quad \bar{ما} = \frac{ا_2}{ا_1} \, ہ$$

کوئی اور دو محور م لا اور م ما لو [شکل نمبر ۱۳۵ (ب)] اور وُہی عمل دُہراؤ۔ اِس طرح م ما سے مرکزِ جاذبہ کا فاصلہ لاَ دریافت کرو۔ پس مرکزِ جاذبہ کے محدد لاَ اور ماَ معلوم ہو گئے۔

مثال:۔ ایک پتلے نصف دائری پتر کا مرکزِ جاذبہ طریقۂ بالا سے دریافت کرو۔ قطر ا ب ۵٫۰ انچ ہے۔

پتر کا مرکزِ جاذبہ م س پر واقع ہے۔ جو ا ب پر عمود ایک نصف قطر ہے۔ پس ترسیمی طریقے سے ماَ معلوم کرنے ہی کی ضرورت ہے، جس کو شکل نمبر ۱۳۶ میں دکھایا ہے۔



شکل نمبر ۱۳۶ ۔ ایک نصف کرہ پتر کا مرکزِ جاذبہ

ذیل کی پیمائشیں ایک سطح پیما سے حاصل ہوئیں:۔

نصف دائری رقبہ ا۱ = ۹٫۸۲ مربع انچ

نیز ا۲ = ۴٫۱۲ ״ ״

∴ ماَ = (ا۲ / ا۱) ۵ = (۴٫۱۲ / ۹٫۸۲) × ۲٫۵

= ۱٫۰۵ انچ

یہ معلوم ہے کہ نصف دائری پتر کا مرکزِ جاذبہ ا ب سے ۴ن / ۳π کے فاصلہ پر ہوتا ہے جہاں ن نصف قطر ہے [شکل نمبر ۱۳۶]۔ نتیجۂ بالا کی تصدیق کے لئے اِس جملہ کے استعمال کرنے سے

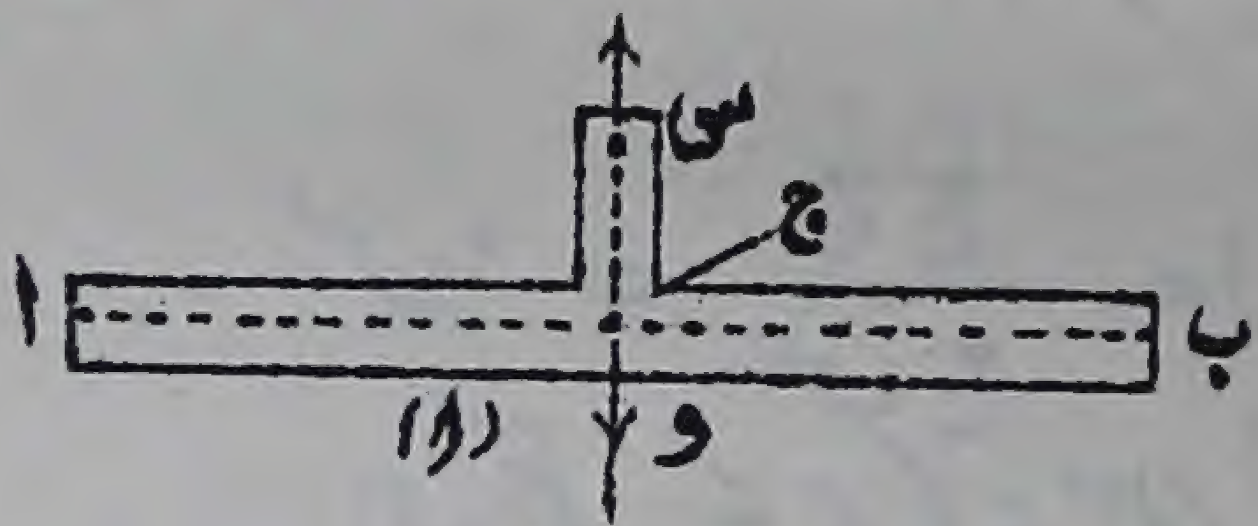
ماَ = (۴ × ۲٫۵) / (۳ × π)

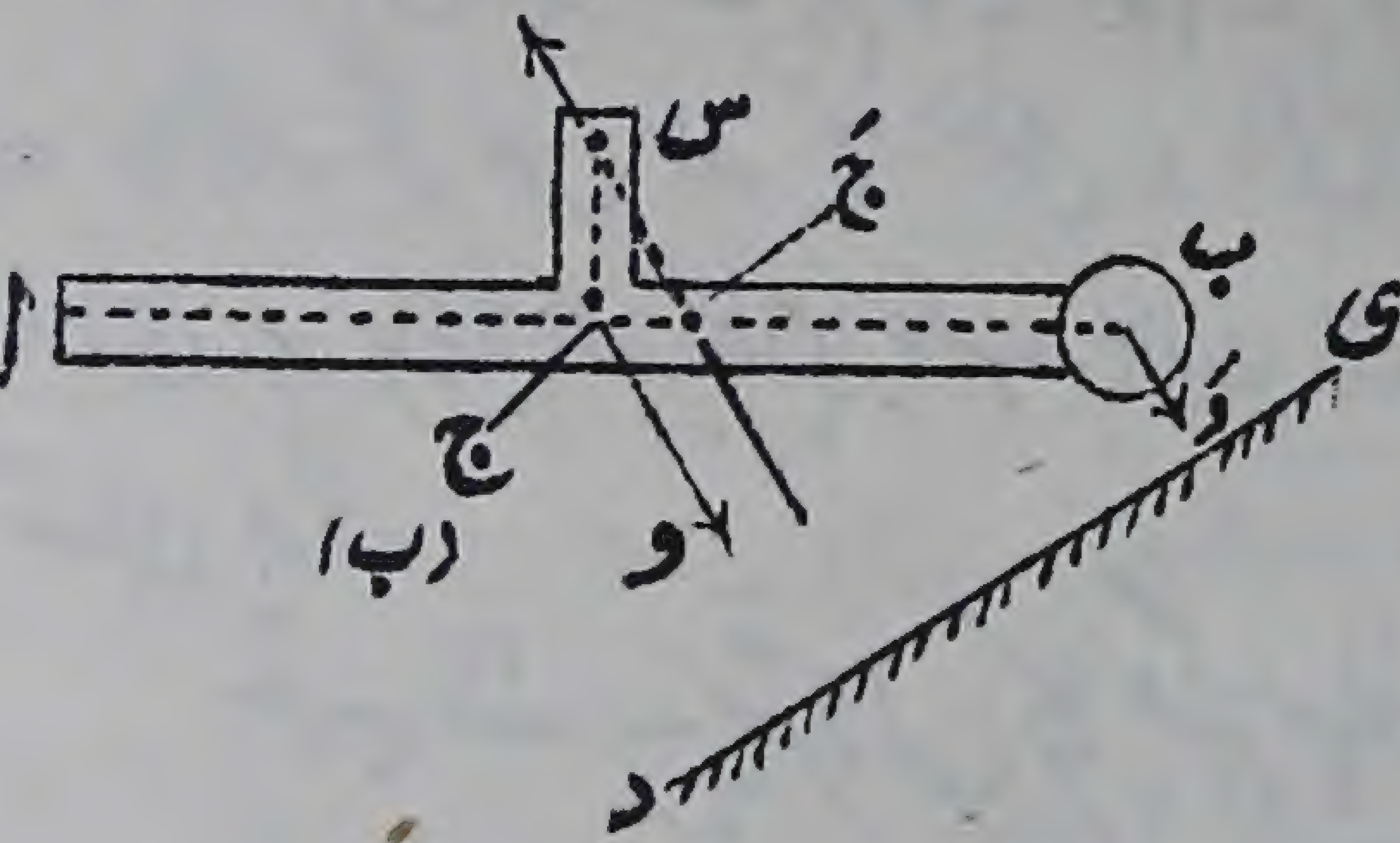
= ۱٫۱۰۶ انچ حاصل ہُوا۔

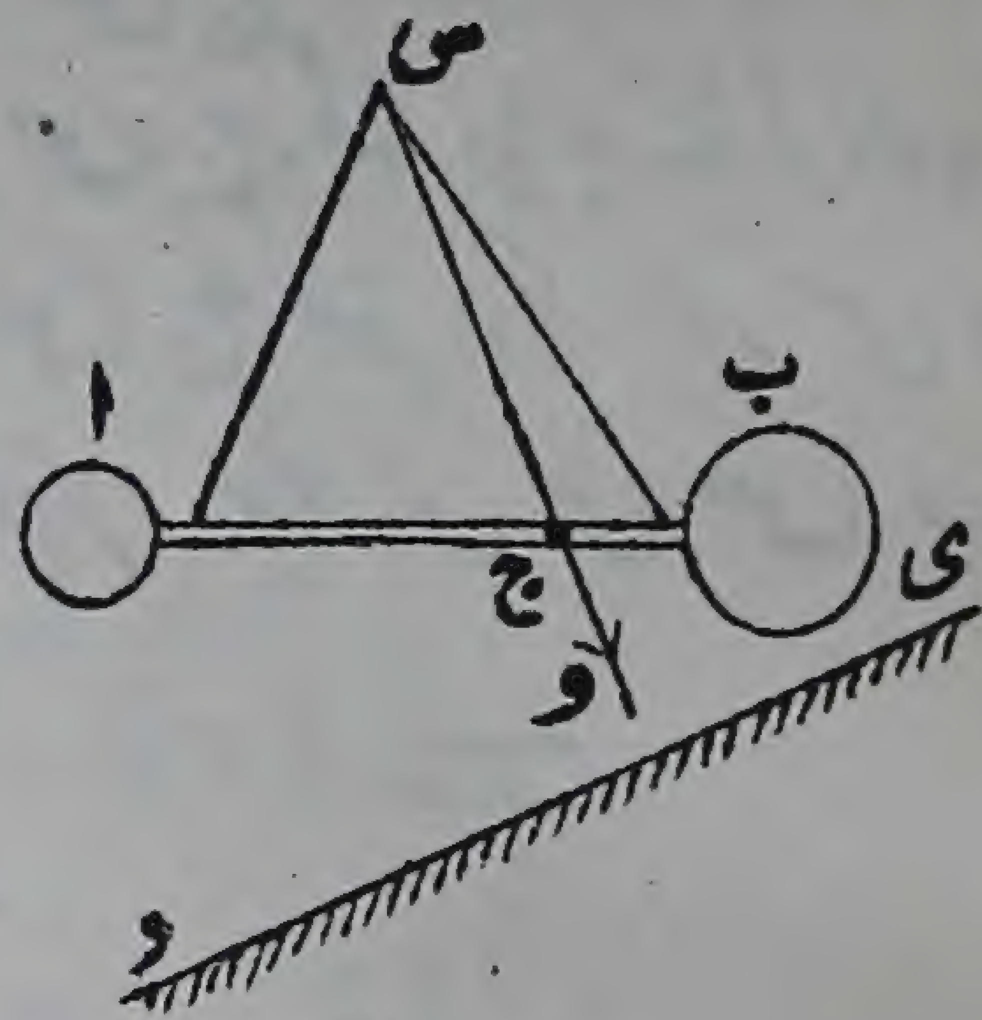
توازن کی وضعیں :۔ اگر ایک جسم ایک ثابت نقطے سے آزادانہ آویزاں کیا جائے تو جس وضع میں وہ بحالتِ توازن آویزاں ہوگا وہ ایسی ہوگی کہ مرکزِ جاذبہ ثابت نقطے میں گزرنے والے انتصابی پر واقع ہو۔

مثال ۱ :۔ ایک بوجھ دار سلاخ ا ب (شکل ۱۳۷) ایک ثابت نقطہ س سے بذریعۂ دو ڈوروں کے آویزاں ہے۔ اس کے توازن کی وضع دریافت کرو۔

بوجھ دار سلاخ کا مرکزِ جاذبہ ج طریقِ بالا کو استعمال کرکے دریافت کر لیا جاتا ہے۔ س ج کو ملاؤ اور اس کو آگے بڑھاؤ۔ اس نظام کا وزن و خط س ج پر عمل کرتا ہے اس لئے س ج انتصابی ہے۔ س ج پر عمود د ی کھینچو۔ اور کاغذ کو گھماؤ یہاں تک کہ د ی اُفقی ہو جائے۔ تو یہ نظام اُس وقت اپنے توازن کی وضع میں ہوگا۔







شکل ۱۳۷ ۔ ایک بوجھ دار سلاخ

شکل ۱۳۸ ۔ ایک بوجھ دار جسم کے توازن کی وضع

مثال ۲ :۔ و وزن کا ایک جسم ا ب س [شکل ۱۳۸ (ا)] س سے آزادانہ آویزاں ہے۔ اور ا ب اُفقی ہے۔ مرکزِ جاذبہ ج خط ا ب کی تنصیف کرتا ہے۔ اور س ج خط ا ب سے °۹۰ پر ہے۔ اگر ب پر وَ وزن کا

ایک جسم لگا دیا جائے تو دریافت کرو کہ اب اُفقی سے کتنا زاویہ بنائیگا [شکل ۱۳۸ (ب)]۔

مرکزِ جاذبہ جَ خط ج ب پر واقع ہے اور اِس کو نسبت

$$\frac{\text{ج جَ}}{\text{ب جَ}} = \frac{\text{وَ}}{\text{و}}$$

میں تقسیم کرتا ہے

$$\therefore \frac{\text{ج جَ}}{\text{ج جَ + ب جَ}} = \frac{\text{وَ}}{\text{و + وَ}}$$

$$\therefore \text{ج جَ} = \left(\frac{\text{وَ}}{\text{و + وَ}}\right) \text{ج ب} \quad \text{-----(1)}$$

س جَ کو ملاؤ اور اِسے بڑھاؤ۔ س جَ سے ۹۰° پر د ی کھینچو۔ تو جب کہ کاغذ اِس طرح گھمایا جائے کہ د ی اُفقی ہو جائے، اُس وقت یہ نظام اپنے توازن کی وضع میں ہوگا۔ اِس وقت جو زاویہ اب اُفقی سے بنائیگا وہ زاویہ ج س جَ کے مساوی ہوگا۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ تہ ہے تو

$$\text{مس تہ} = \frac{\text{ج جَ}}{\text{س ج}} = \left(\frac{\text{وَ}}{\text{و + وَ}}\right)\frac{\text{ج ب}}{\text{س ج}} \quad [\text{(1) سے}] \text{---(2)}$$

اِس نتیجہ سے ہم کو یہ معلوم ہُوا کہ اگر س ج گھٹا دیا جائے تو زاویہ تہ بڑھ جائیگا۔ اگر س اور ج منطبق ہو جائیں تو س ج صفر ہوگا اور مس تہ لامتناہی ہو جائیگا اور نظام حالتِ توازن میں آویزاں ہوگا جس میں س ب انتصابی ہوگا۔



شکل ۱۳۹۔ تجربے سے ایک پتر کا مرکزِ جاذبہ

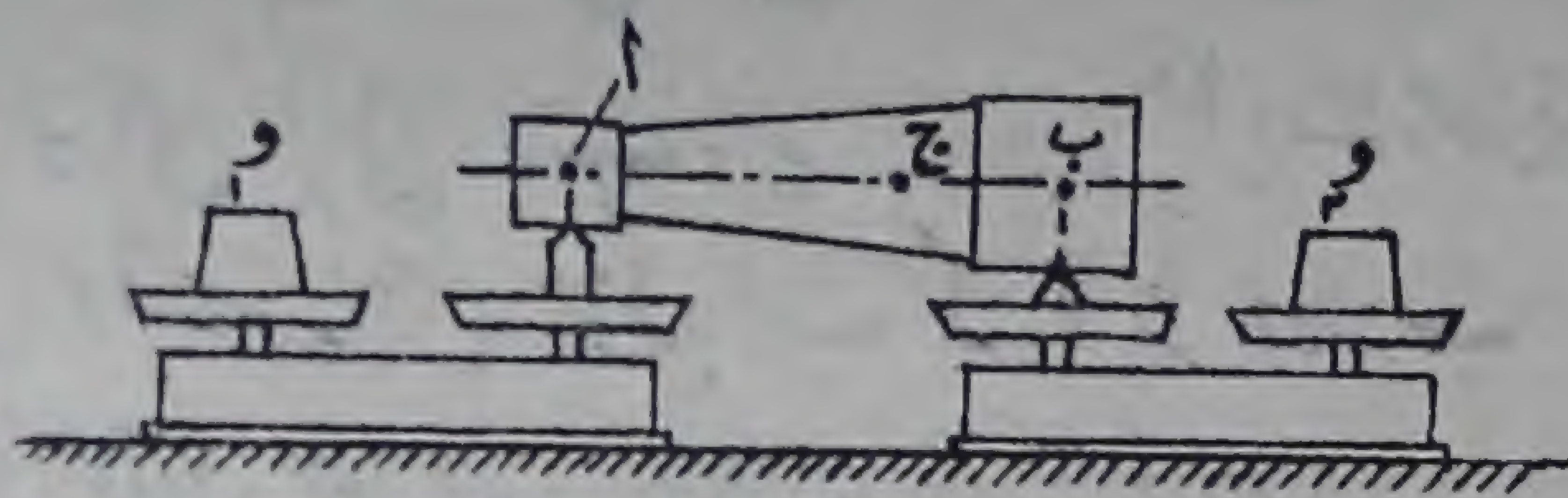
تجربہ ۲۱ — پتروں کا مرکزِ جاذبہ۔

— ایک ثابت سہارے سے ایک ڈورے اب کے ذریعہ سے لٹکا کر ایک پتلے پتر کا مرکزِ جاذبہ دریافت کیا جا سکتا ہے [شکل ۱۳۹]۔ ڈورا نیچے کی طرف بڑھتا ہُوا چلا گیا ہے اور ایک چھوٹا سا وزن و بھی اِس میں لگا ہُوا ہے جس کی وجہ سے وہ شاقول کا بھی کام دیتا ہے۔ پتر پر سمت

اس مرتسم کرو - اور پھر د سے لٹکا کر یہی عمل کرو جس سے نیا انتصابی د ی حاصل ہوگا - ا س اور د ی کا نقطۂ تقاطع ج ہوگا - دی ہوئی دھات کے یا دفتی کے پتروں کے لئے یہ تجربہ عمل میں لاؤ -

تجربہ ۲۲ :- ایک ٹھوس جسم کا مرکزِ جاذبہ ——

جسم کو اِس طرح ترتیب دو کہ ترازووں کے پلڑوں میں رکھی ہوئی دو دھاروں پر وہ قائم ہو جائے [شکل ۱۴۰]- وزن و اور $و_۲$ دریافت کرو جو ترازووں کو توازن میں لے آئیں - ان سے سہاروں کے ردِ عمل معلوم ہوتے ہیں- دھاروں کے درمیانی فاصلہ ا ب کی پیمائش کرو- فرض کرو کہ مرکزِ جاذبہ ج ہے تو



شکل ۱۴۰- ایک جسم کا مرکز جاذبہ دریافت کرنے کا تجرباتی طریقہ

$$\frac{\text{ا ج}}{\text{ب ج}} = \frac{و_۲}{و_۱}$$

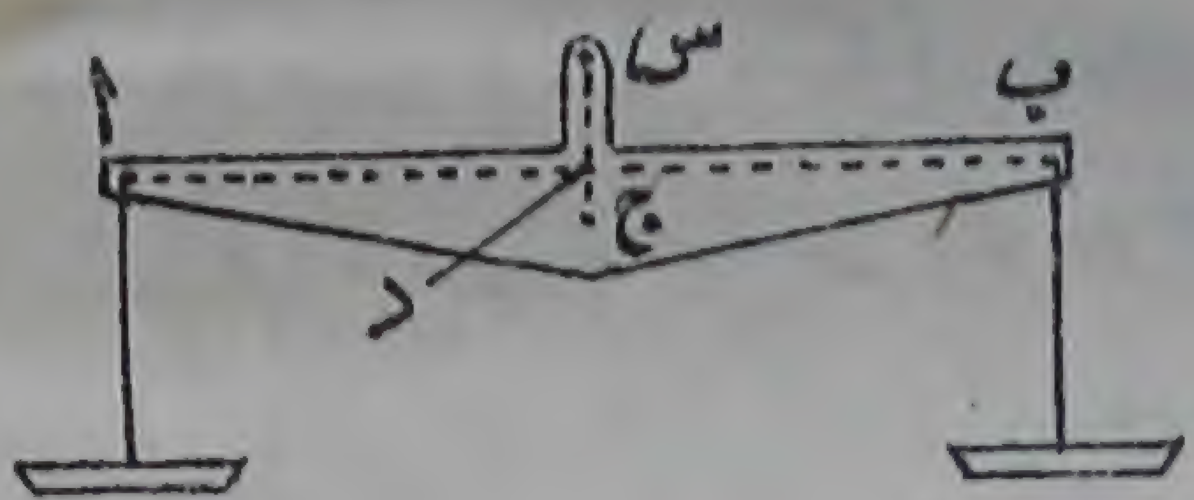
$$\therefore \frac{\text{ا ج}}{\text{ا ج} + \text{ب ج}} = \frac{و_۲}{و_۱ + و_۲}$$

$$\therefore \text{ا ج} = \frac{و_۲}{و} \text{ا ب}$$

جہاں $و = و_۱ + و_۲ =$ جسم کا وزن

معمولی ترازو:- شکل ۱۴۱ میں جو خاکا کھینچا گیا ہے اُس میں ڈنڈی ا ب ایک دھاردار کنارے واقع س کے گرد آزادی سے گھوم سکتی ہے - اور اِس کا مرکزِ جاذبہ ج پر ہے - ا اور ب پر واقع دھاردار کناروں پر سے پلڑے لٹکا دیئے جاتے ہیں-

اگر پلڑے نکال دیے جائیں تو ڈنڈی بہ حالتِ سکون رہیگی اور ج نقطہ س، سے گزرتے ہوئے انتصابی پر واقع ہوگا۔ اب خط س ج کو د پر ۹۰° پر قطع کرتا ہے اور اِس لئے اُفقی ہے۔ ترازو کے صحیح ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ ڈنڈی سے پلڑوں کے لٹکائے جانے پر بھی ڈنڈی اُفقی رہے اور نیز جب پلڑوں میں مساوی وزن رکھے جائیں تو بھی اُفقی رہے۔ یہ

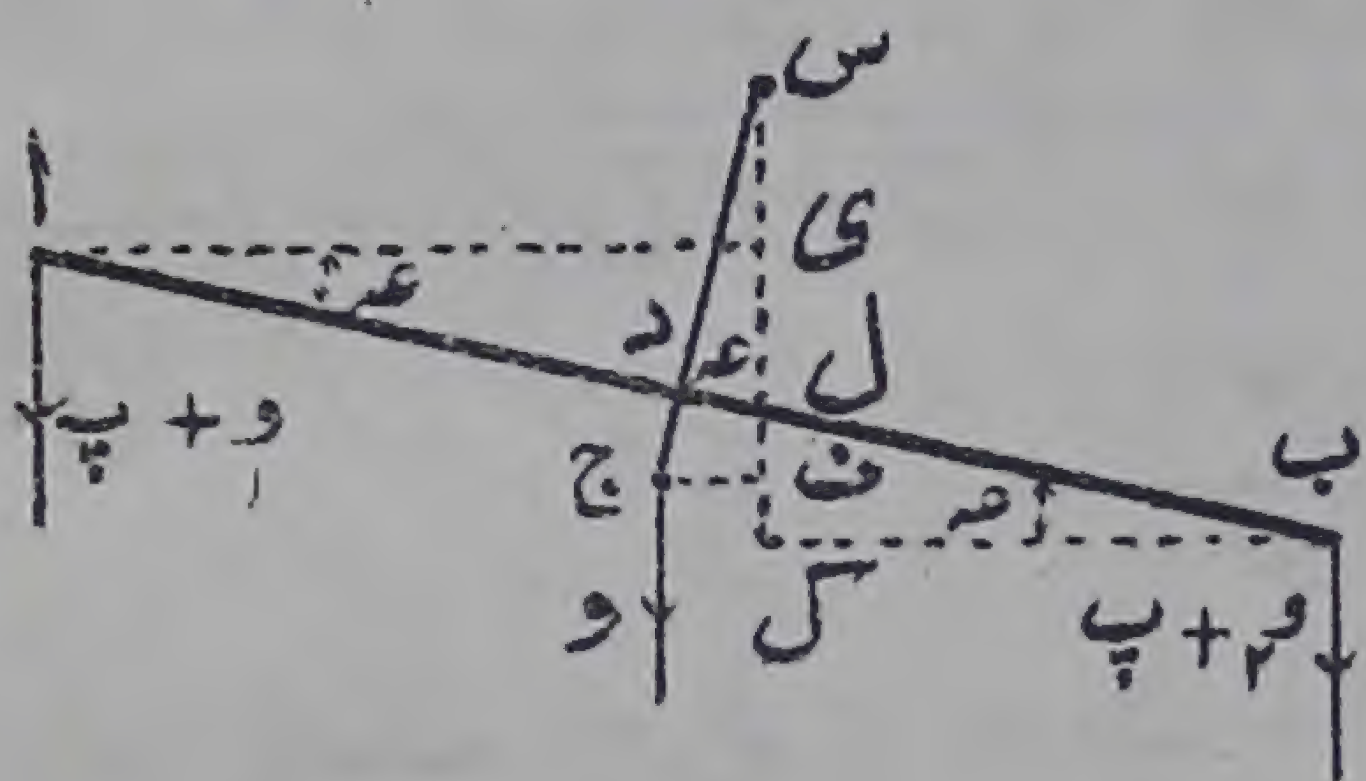


شکل ۱۴۱ معمولی ترازو کا اصول

شرطیں اُس وقت پوری ہونگی جب کہ ا د اور ب د برابر ہوں اور پلڑے مساوی الوزن ہوں۔

مثال:۔ ایک ترازو کی ڈنڈی شکل ۱۴۲ میں دکھائی گئی ہے۔ پلڑوں میں غیر مساوی وزن و۱ اور و۲ جن میں سے و۲ بڑا ہے، رکھے گئے ہیں۔ زاویہ ع دریافت کرو جو ا ب اُفقی سے بناتا ہے۔

فرض کرو کہ ہر پلڑے کا وزن پ ہے اور ڈنڈی اور اُس کے ملحقات کا وزن و ہے۔ فرض کرو کہ س د = اَ، س ج = بَ اور ا د = د ب = سَ۔ ظاہر ہے کہ س ج انتصابی سے ع پر مائل ہے۔ انتصابی س ک کو قطع کرنے کے لئے ا ی، ب ک، ج ف اُفقاً کھینچو۔



شکل ۱۴۲۔ غیر مساوی بوجھ والی ترازو

فرض کرو کہ یہ انتصابی ا ب کو ل پر قطع کرتا ہے۔ س کے

گرد معیارِ اثر لو جس سے حاصل ہوا

(و۱ + پ) ا ی + و ج ف = (و۲ + پ) ب ک

(و۱ + پ) ا ل جم عہ + و × س ج × جب عہ = (و۲ + پ) ب ل جم عہ

(و۱ + پ) (ا د + د ل) جم عہ + و × بَ × جب عہ

= (و۲ + پ) (ب د - د ل) جم عہ

(و۱ + پ) (سَ + اَ مس عہ) جم عہ + و × بَ × جب عہ

= (و۲ + پ) (سَ - اَ مس عہ) جم عہ

(و۱ + پ) (سَ + اَ مس عہ) + و بَ مس عہ

= (و۲ + پ) (سَ - اَ مس عہ)

(اَ و۱ + اَ پ + و بَ + اَ و۲ + اَ پ) مس عہ

= و۲ سَ + پ سَ - و۱ سَ - پ سَ

∴ مس عہ = (و۲ - و۱) سَ ÷ [و بَ + (و۱ + و۲ + ۲ پ) اَ]

وزنوں کے دیے ہوئے فرق (و۲ - و۱) کے لئے زاویہ عہ کی مقدار ترازو کی **حساسیت** کا اندازہ مانی جا سکتی ہے۔ عہ کی مقدار پر جو اجزاء اثر ڈال سکتے ہیں وہ مس عہ کے لئے ضابطۂ بالا میں بتا دیے گئے ہیں۔ بازووں ا د = د ب = سَ [شکل ۱۴۲] کے طول میں زیادتی عہ کو بڑھا دیگی اور بنابریں حساسیت کو بھی۔ حاصلِ ضرب و بَ کو بڑھانے سے حساسیت گھٹ جاتی ہے۔ پس ڈنڈی کے وزن و کو اُستواری کا لحاظ رکھتے ہوئے کم سے کم رکھنا چاہیئے۔ س ج = بَ [شکل ۱۴۲] کو گھٹانے سے زائد تر حساسیت پیدا کی جا سکتی ہے۔ س د = اَ کو گھٹانے سے حساسیت بڑھ جاتی ہے اور اکثر تجربہ خانوں کی ترازووں میں س اور د منطبق ہوتے ہیں۔ اگر ج بھی د سے منطبق ہو جائے تو نتیجہ یہ ہوگا کہ **قیام پذیری** میں نقص واقع ہوگا۔ کیونکہ اس حالت میں ڈنڈی اُفقی سے ہر زاویے پر بحالتِ

توازن رہیگی۔ ایک حساس ترازو میں ج نقطۂ د سے کچھ ہی نیچے ہوتا ہے اور س اور د منطبق ہو سکتے ہیں۔ (و۱ + و۲ + ۲پ۱) کی زیادتی سے حساسیت گھٹ جاتی ہے۔ بنابریں وہ ترازویں جو نازک کام کے لئے بنائی گئی ہوں وہ بھاری جسموں کے تولنے کے لئے ناموزوں ہوتی ہیں۔ اور نازک ترازوؤں کے پلڑے بھی ہلکے ہونے چاہئیں۔ اِن اصولوں کے استعمال کو اچھی طرح سمجھنے کے لئے متعلم کو چاہیئے کہ ایک نازک ترازو کے مختلف حصے بغور دیکھے۔

ترازو کی صحت:۔ مساوی الکمیت پلڑوں والی صحیح ترازو اُفقی سے اُوپر نیچے مساوی زاویوں میں اہتزاز کریگی۔ پلڑوں میں کمیتیں رکھ کر اِس صحت کی جانچ کی جا سکتی ہے تا آنکہ یہ شرط پُوری ہو جائے۔ اِس وقت کمیتیں بدل دی جاتی ہیں تو اگر ترازو صحیح ہے تو پھر مساوی زاویے بنینگے۔

شکل ۱۴۱ میں فرض کرو کہ بازو ا د اور ب د غیر مساوی ہیں۔ اور فرض کرو کہ ترازو اِس طرح بنائی جائے کہ ا ب اُفقی رہے یا پلڑوں کے خالی ہونے کی صورت میں اُفقی سے اُوپر نیچے مساوی زاویوں میں اہتزاز کرے۔ فرض کرو کہ بائیں پلڑے میں و وزن کا ایک جسم رکھا گیا ہے اور نیز یہ کہ دُوسرے پلڑے میں ایک وزن پ اِس کو تول لیتا ہے۔ اب و کو داہنے پلڑے میں رکھو۔ اور فرض کرو کہ توازن قائم کرنے کے لیے مطلوبہ وزن ک ہے۔ ہر صورت میں س کے گرد معیارِ اثر لو [شکل ۱۴۱]

و × ا د = پ × ب د - - - - - (۱)

و × ب د = ک × ا د - - - - - (۲)

حاصلِ ضرب لینے سے

و۲ × ا د × ب د = پ × ک × ب د × ا د حاصل ہوا

∴ و = √پ ک - - - - - - (۳)

پس صحیح وزن غیر صحیح وزنوں پ اور ک کا ہندسی اوسط ہے۔ اگر حسابی اوسط $\frac{1}{2}$ (پ + ک) صحیح وزن مانا جاتا تو نتیجہ ۹ سے زیادہ ہوتا۔

نویں فصل کی مشقیں

(۱) ۱۲ فٹ لمبی ایک یکساں کڑی کا وزن ۵۰۰ پونڈ ہے۔ اور ۶۰۰۰ پونڈ کا ایک بوجھ اس کے بائیں نصف پر یکسانیت کے ساتھ پھیلا ہوا ہے۔ اگر ڈنڈی اپنے کناروں کے سہارے قائم ہو تو سہاروں کے ردِ عمل دریافت کرو۔

(۲) ایک ڈیرک[1] حمالہ کا بازو [صفحہ ۱۸۵] ۳۰ فٹ لمبا ہے اور اُس کا وزن ۸۰۰ پونڈ ہے۔ نیچے والے سرے سے مرکزِ جاذبہ ۱۲ فٹ پر ہے۔ حمالہ کی ٹھونی اور بندش علی الترتیب ۱۶ فٹ اور ۲۰ فٹ کے ہیں۔ دریافت کرو کہ بازو کو سنبھالنے کے لئے بندش میں کتنی کھینچ ہونی چاہیئے۔

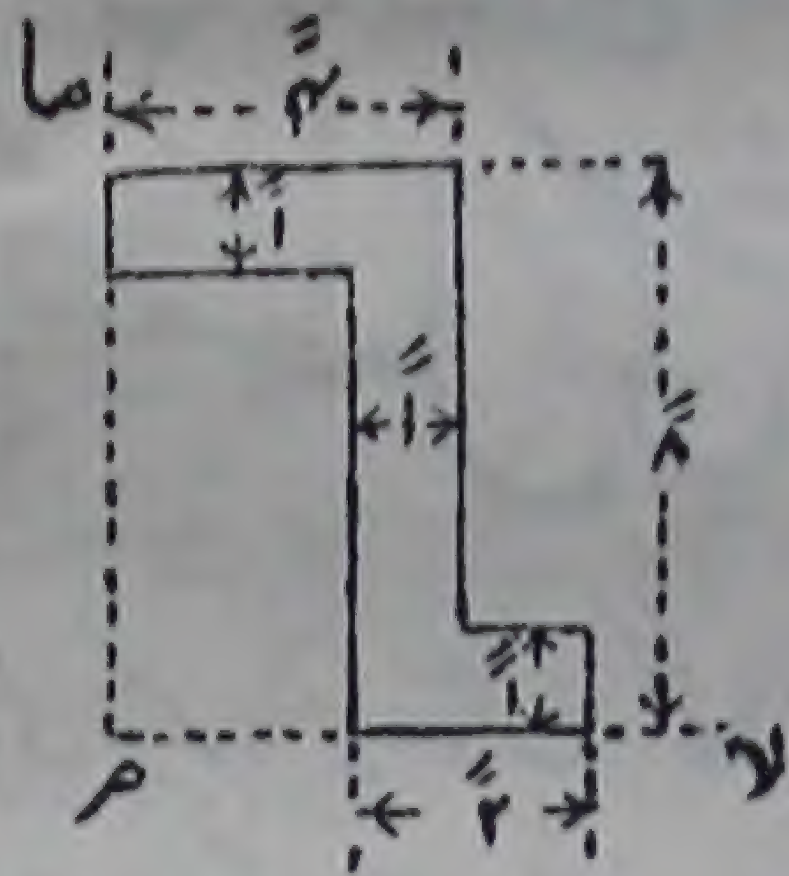
(۳) ۲۰ فٹ لمبی ایک سیڑھی ا ب کا وزن ۹۰ پونڈ ہے اور اس کا مرکزِ جاذبہ ا سے ۸ فٹ پر ہے۔ دو آدمی اس سیڑھی کو اُفقاً لے جاتے ہیں جن میں سے ایک ا پر ہے۔ ا سے ۱۲ فٹ کے فاصلے سے ۶۰ پونڈ وزن کا اوزاروں کا ایک تھیلا لٹکا دیا جاتا ہے۔ اگر دونوں آدمیوں کے حصے میں بوجھ مساوی طور سے آئے تو دریافت کرو کہ دُوسرے آدمی کی وضع کہاں ہونا چاہیئے۔

(۴) یکساں موٹائی کی لوہے کی ایک تختی مثلث کی شکل میں کاٹ لی جاتی ہے۔ ضلع ا ب = ۲ فٹ، ب س = ۳ فٹ، س ا = ۴ فٹ ہے۔ اگر تختی کا وزن ۵۰ پونڈ ہو اور ایک اُفقی فرش پر رکھی ہو تو دریافت کرو کہ وہ انتصابی قوت کیا ہے جو اگر ایک کونے پر استعمال کی جائے تو اُس کونے کو اٹھا دے۔

(۵) ایک پتلی تختی شکل ۱۴۳ کے مطابق کاٹی گئی ہے۔ اِس کا

[1] Derrick

مرکزِ جاذبہ دریافت کرو۔



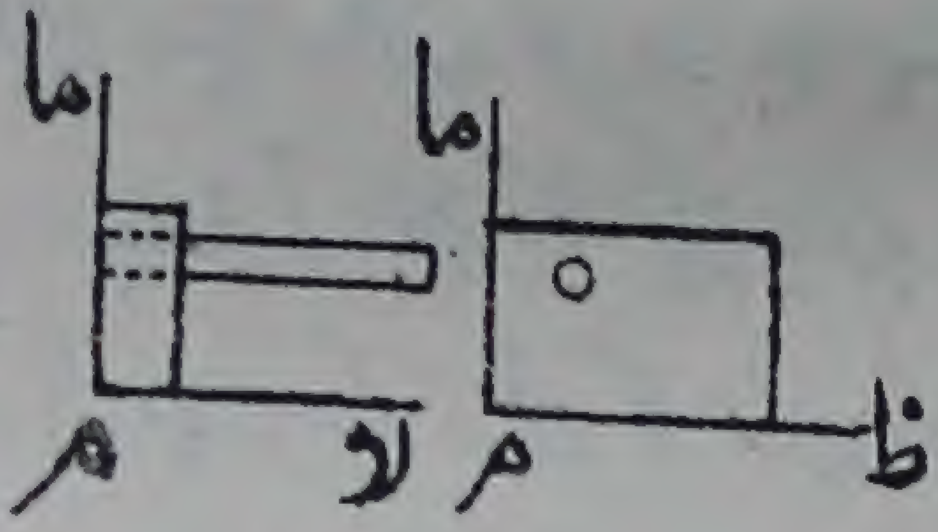
شکل ۱۴۳

(۶) پُورے پیمانے کا ذوار بعۃ الاضلاع ا ب س د کھینچو:۔
ا ب = ۴ انچ، ب س = ۲$\frac{1}{2}$ انچ
س د = ۳$\frac{1}{2}$ انچ، د ا = ۳$\frac{3}{4}$ انچ
وتر ا س = ۴$\frac{1}{4}$ انچ،
شکل ایک پتلی تختی کو تعبیر کرتی ہے۔ اُس کا مرکزِ جاذبہ دریافت کرو۔ اگر تختی کا وزن ۲ پونڈ ہو اور میز پر رکھی ہو تو کونے د کو اُٹھا دینے کے لئے کتنی انتصابی قوت درکار ہوگی۔

(۷) ایک پتلی تختی ۱۸ انچ ضلع کے ایک مثلث متساوی الاضلاع کی شکل میں کاٹی جاتی ہے۔ ایک کونے سے ۶ انچ ضلع کا ایک مثلث متساوی الاضلاع کاٹ لیا جاتا ہے۔ تو بقیہ تختی کا مرکزِ جاذبہ دریافت کرو۔

(۸) ۲۰ انچ قطر کی ایک پتلی مدّور تختی پر دو نصف قطر ہیں جو ۹۰° پر ملتے ہیں۔ تختی کے کنارے سے ۳ انچ کے فاصلے سے ایک نصف قطر پر ۶ انچ قطر والے ایک گول سُوراخ کا مرکز ہے۔ اور تختی کے کنارے سے ۲ انچ کے فاصلے سے دُوسرے نصف قطر پر ۴ انچ قطر والے ایک دُوسرے گول سوراخ کا مرکز ہے۔ تو سُوراخوں کے کاٹ لئے جانے کے بعد تختی کا مرکزِ جاذبہ دریافت کرو۔

(۹) لوہے کی ایک مستطیل تختی [شکل ۱۴۴] ۱۴ انچ در ۸ انچ در ½ انچ موٹی ہے۔ تختی میں ۲ انچ قطر کا ایک سوراخ کیا جاتا ہے، جس کا مرکز تختی کے ایک کنارے سے ۵ انچ اور متصل کنارے سے ۲ انچ ہے۔ ۲ انچ قطر کی اور ۲۰ انچ لمبی لوہے کی ایک سلاخ اس سوراخ میں داخل کردی جاتی ہے، اس کا سرا تختی کی سطح سے ہموار ہے۔ اس جسم کا مرکز جاذبہ دریافت کرو۔



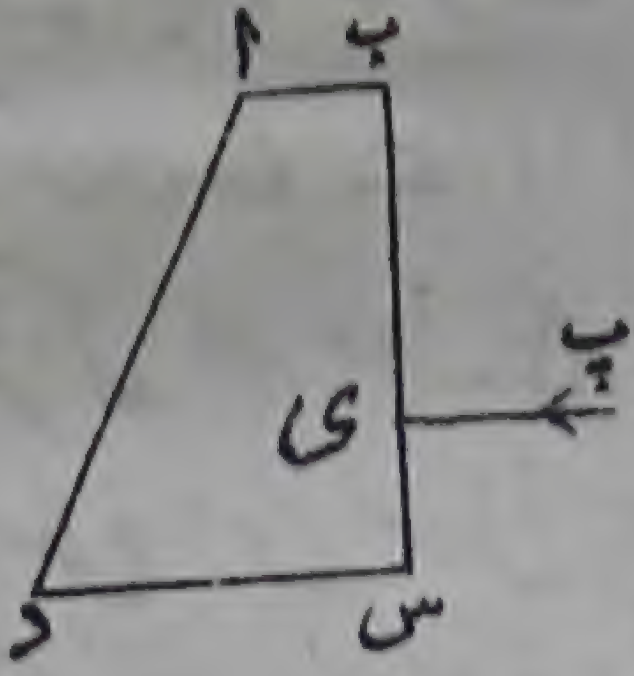
شکل ۱۴۴

(۱۰) یکساں عمودی تراش کے ۱۲ فٹ لمبے ایک تختے کا وزن ۴۰۰ پونڈ ہے۔ وہ ایک کنارے کے سہارے اور دوسرے کنارے سے ۳ فٹ دور ایک نقطہ کے سہارے پر قائم ہے۔ سہاروں کے ردِّ عمل دریافت کرو۔ نیز بتاؤ کہ سہارے پر سے باہر نکلے ہوئے کنارے پر تختے کو اُلٹے بغیر زیادہ سے زیادہ کتنا بوجھ رکھا جا سکتا ہے۔ جب یہ بوجھ رکھدیا جاتا ہے تو سہاروں کے ردِّ عمل کیا ہیں۔

(۱۱) پتھر کا ایک مستطیل کُندا ایک سرے کے بل ایک اُفقی سطح پر رکھا ہے۔ کندا ۴ فٹ اُونچا، ۲ فٹ چوڑا، اور ۲ فٹ موٹا ہے۔ اگر پتھر کا وزن ۱۵۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہو تو بتاؤ کہ کندے کے اُوپر ایک کنارے کے مرکز پر کتنی بڑی اُفقی قوت لگائی ہوگی تاکہ کُندا ایک کنارے کے بل اُٹھ جائے پھسل روک دی گئی ہے۔

(۱۲) سوال ۱۱ میں جو کُندا دیا گیا ہے وہ ایک پہلو کے بل ایک مضبوط تختے پر قائم ہے، جس کا ایک کنارا اُٹھایا جا سکتا ہے۔ کنارے کے پہلو کے دو کنارے تختے کے لمبے کناروں کے متوازی ہیں اور پھسل کو روکنے کے لئے تدابیر اختیار کی جاتی ہیں۔ جب کُندا بالکل اُلٹنے پر ہو تو تختہ کا زاویۂ میلان اُفق کے ساتھ کیا ہوگا۔

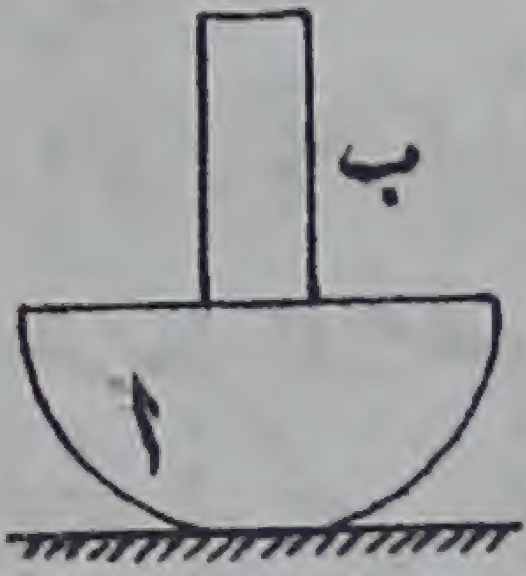
(۱۳) ا ب س د ۴۰ فٹ لمبی ایک دیوار کی عمودی تراش ہے [شکل ۱۴۵]- ا ب = ۴ فٹ اور اُفقی ہے۔ ب س = ۱۵ فٹ اور انتصابی ہے۔ س د = ۹ فٹ اور اُفقی ہے۔ تو دیوار کا مرکزِ جاذبہ دریافت کرو۔ اگر دیوار کے ملبے کا وزن ۱۵۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہو تو س سے س ی = ۵ فٹ کی بلندی پر کتنی اُفقی قوت پ لگانی چاہیئے جو دیوار کو ٹھیک اُلٹ دے سکے۔



شکل ۱۴۵

(۱۴) ایک ٹھوس یکساں نصف کرّہ ایک اُفقی میز پر اِس طرح رکھا ہے کہ منحنی سطح میز پر متماس ہے۔ دکھاؤ کہ توازن قائم ہے۔

(۱۵) شکل ۱۴۶ میں ا نیم اُستوانہ نما ایک جسم ہے جو ایک اُفقی میز پر رکھا ہے۔ ا کا اُوپر کا رُخ مستطیل ہے۔ جو کاغذ پر عمودی سمت میں ۱۰ انچ لمبا اور کاغذ کے مستوی کی متوازی سمت میں ۴ انچ ہے۔ ب اُستوانہ نما ایک سلاخ ہے جو اُسی چیز سے بنی ہے جس سے کہ ا جس کا قُطر ۲ انچ ہے اور جو ا کے اُوپر والے رُخ کے مرکز پر عموددار قائم ہے۔ تو ب کی اُونچائی دریافت کرو تاکہ کُل کا توازن تعدیلی رہے۔ [ا کا مرکزِ جاذبہ ی بالائی رُخ سے $\frac{۴ن}{۱۱۳}$ کے فصل پر ہے]-



شکل ۱۴۶

(۱۶) ایک متساوی الساقین مثلث اِس طرح کھینچو کہ ضلع ا ب اور ا س ۴ انچ لمبے ہوں اور قاعدہ ب س ۳ انچ لمبا ہو۔ ا، ب، اور س، پر ۴، ۶، اور ۸ پونڈ وزن کے جسم علی الترتیب رکھے جاتے ہیں۔ مثلث ایک پتلے پتّر کا بنا ہے اور ا پونڈ وزنی ہے۔ اگر اِس ترتیب کو ا ب

کے مرکز سے بندھے ایک ڈورے سے لٹکا دیا جائے تو دریافت کرو اور شکل بنا کر بھی دکھاؤ کہ وہ کونسی وضع اختیار کریگا۔

(۱۷) شکل ۱۴۷ میں جو پتر دکھایا گیا ہے اُس کا مرکزِ جاذبہ ترسیماً دریافت کرو۔ مدوّر حصّے کے مرکز سے ۱ اِنچ کے فصل سے ایک وتر ا ب کھینچا جاتا ہے۔ اور مدوّر حصہ کا نصف قطر ۲ اِنچ ہے۔



شکل ۱۴۷

(۱۸) ایک جسم پہلے ایک ناقص ترازو کے ایک پلڑے میں اور پھر دوسرے پلڑے میں رکھا جاتا ہے۔ جب وہ پہلے پلڑے میں تھا تو دوسرے پلڑے میں ۵۶۲ء۰ پونڈ وزن رکھنے سے توازن قائم ہوا۔ دوسرے عمل میں وزن ۵۵۷ء۰ پونڈ تھا۔ تو جسم کا صحیح وزن کیا ہے۔ یہ مان لو کہ پلڑے خالی ہونے کی صورت میں ترازو کی ڈنڈی ٹھیک طور سے جھولتی ہے۔ اگر حسابی اوسط کو صحیح وزن مانا جائے تو کیا خطا پیدا ہوتی ہے؟

(۱۹) ۸۵ گرام وزن کا ایک یکساں بیرم اپنے مرکز سے ۳ء۳ سمر کے فصل سے ایک نقطہ پر ایک دھاردار کنارے کے بل قائم ہے۔ اور اِس کے لمبے بازو پر سہارے سے ۳ء۲۳ سمر کے فصل سے ۱۰۵ گرام کا ایک وزن اور ۴ء۱۸ سمر کے فصل سے ۱۱۳ گرام کا ایک وزن رکھا ہے۔ تو چھوٹے بازو پر سہارے سے ۷ء۲۱ سمر کے فصل سے کتنا وزن رکھنا چاہیئے تاکہ بیرم توازن میں رہے۔ [جامعۂ ادیلاڈ]

(۲۰) ثابت کرو کہ اگر و وزن کا ایک مسافر ایک موٹر بگھی کی چھت پر فاصلہ ا طے کرے تو پچھلی کمانیوں سے اگلی کمانیوں پر ایک وزن $\frac{و ا}{ب}$ منتقل ہو جاتا ہے جہاں ب دُھریوں کا درمیانی فاصلہ ہے۔ [جامعۂ لنڈن]۔

(۲۱) ۱۸ اِنچ لمبی ایک یکساں سلاخ ا ب کے کنارے ا پر ۵ء۷ اِنچ لمبا ایک ڈورا بندھا ہے اور ۵ء۱۹ اِنچ لمبا ایک دُوسرا ڈورا ب پر بندھا ہے۔

دونوں ڈورے ایک کھونٹی س میں باندھ دیے جاتے ہیں اور سلاخ آزادانہ لٹکتی ہے ۔ تو تقریباً وہ زاویہ دریافت کرو جو سلاخ اُفقی سے بناتی ہے ۔

(۲۲) ایک یکساں نصف دائری پتر کا مرکزِ جاذبہ قطری کنارے سے $\frac{4ن}{3\pi}$ کے فصل پر ہوتا ہے جہاں ن نصف دائرے کا نصف قطر ہے ۔ تو اِس معلومات سے رُبع دائرے کی شکل کے ایک یکساں پتر کا مرکزِ جاذبہ اخذ کرو ۔ اور جس طریقہ سے اِس مرکز کو اخذ کروگے اُسے واضح طور سے سمجھاؤ ۔ [جامعۂ لندن]

(۲۳) ا ب س ایک اُفقی بیرم ہے جو اپنے نقطۂ وسطی ب پر ایک چُول پر قائم ہے ۔ اور جس میں نقطۂ س پر و وزن کا ایک پلڑا لگا ہوا ہے ۔ ا د ایک ہلکی سلاخ ہے جو بیرم سے ا پر ایک چُول سے وابستہ ہے اور اسے انتصاباً اوپر نقطۂ د پر ایک اُفقی سلاخ ف دی سے بذریعہ ایک چُول کے ملحق ہے ۔ یہ سلاخ اپنے کنارے ف پر جو ثابت ہے آزادانہ گھوم سکتی ہے ۔ اِس سلاخ کا وزن و ہے ۔ اور اِس کا مرکزِ جاذبہ ف سے فاصلہ وَ پر ہے اور ف د = سَ ، س پر والے پلڑے میں مختلف وزن و رکھے جائیں اور سلاخ پر ایک متحرک وزن وَ استعمال کیا جائے تو دکھاؤ کہ اِس سلاخ کی درجہ بندی کس طرح عمل میں آئیگی ۔ اگر اِنچ کے درجے پونڈ وزن کے متناظر ہوں اور وَ = $\frac{1}{4}$ پونڈ تو سَ کی قیمت دریافت کرو ۔ اِس صورت میں و اور و میں علاقہ دریافت کرو جب کہ دَ = ۱ اِنچ اور نشان صفر ف سے ۱ اِنچ پر ہو ۔ [جامعۂ لندن]

(۲۴) متوازی قوتوں کے ایک نظام کے مرکز کے معنی کی تشریح کرو ۔ اور بتاؤ کہ اِس کو کس طرح دریافت کیا جائے ۔

ایک مربع کے کونوں پر علی الترتیب ۱، ۳، ۴، ۱۰ پونڈ کے وزن رکھے جاتے ہیں ۔ تو مربع کے ہر ضلع سے اِن کے مرکزِ جاذبہ کا فاصلہ دریافت کرو ۔

[جامعۂ عثمانیہ]

(۲۵) ایک گاڑی کے پہیوں کے درمیان محوری فاصلہ ۵ فٹ ہے ۔ گاڑی پر بوجھ متشاکلانہ ہے ۔ اور مرکزِ جاذبہ زمین سے ۶ فٹ کی بلندی پر ہے ۔

تو بتاؤ کہ گاڑی کو اُلٹے بغیر انتصابی سے زیادہ سے زیادہ کس زاویے تک گاڑی میں پہلو وار جُنبش دی جا سکتی ہے۔

(۲۶) ایک حراکہ (لوکوموٹف) کے مرکزِ جاذبہ کی بلندی دریافت کرنے کے لئے اس کو پٹڑیوں پر رکھتے ہیں جن میں سے ایک دُوسری سے ۵ انچ اُوپر ہے۔ اِس وقت یہ پایا جاتا ہے کہ اُوپر اور نیچے کی پٹڑیوں پر علی الترتیب ۴۳ و ۳۷ ٹن کی انتصابی قوتیں ہیں۔ اگر پٹڑیوں کا درمیانی فاصلہ ۵ فٹ ہو تو مرکزِ جاذبہ کی بلندی حساباً دریافت کرو۔

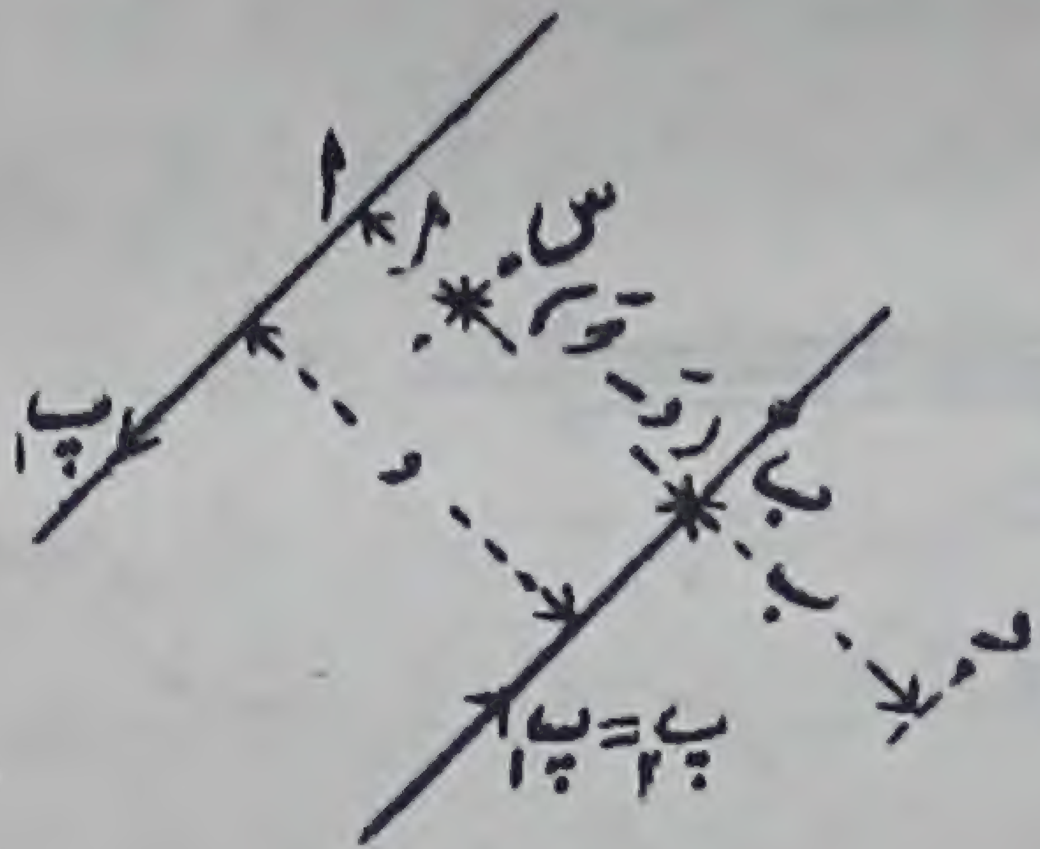
(۲۷) ثابت کرو کہ ترازُو کی حسّاسیت ڈنڈی کے بازُو کے طول کے تناسب ہے اور ڈنڈی کے وزن کے بالعکس تناسب ہے اور ڈنڈی کے مرکزِ جاذبہ اور بیچ والی دھار کے فاصلے کے بھی بالعکس تناسب ہے۔



دسویں فصل

جُفت، یک مستوی قوتوں کے نظام

جُفت کا معیارِ اثر: شکل ۱۴۸ میں $پ_۱$ اور $پ_۲$ دو مساوی متوازی قوتیں مخالف جہت کی ہیں اور اس لئے ایک جُفت بناتی ہیں [صفحہ ۱۶۱] علی التواتر ا، ب، س اور د کے گرد معیار اثر لینے سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ جُفت کا معیارِ اثر اپنے مستوی کے ہر نقطہ کے گرد ایک ہی ہوتا ہے۔ چنانچہ:-



شکل ۱۴۸۔ ایک جُفت کا معیار اپنے مستوی کے ہر نقطہ کے گرد ایک ہی ہوتا ہے

ا کے گرد معیارِ اثر کے لینے سے

$$\text{جُفت کا معیارِ اثر} = (پ_۱ \times ۰) - (پ_۲ \times دَ)$$

$$= -پ_۲\, دَ \qquad (۱)$$

منفی علامت سے خلاف ساعت معیارِ اثر ظاہر ہوتا ہے۔

ب کے گرد معیارِ اثر لینے سے

$$\text{جُفت کا معیارِ اثر} = (پ_۲ \times ۰) - (پ_۱ \times دَ)$$

$$= -پ_۱\, دَ \qquad (۲)$$

س کے گرد معیارِ اثر لینے سے

جفت کا معیارِ اثر = -(پ₁ × اَ) - پ₂ (دَ - اَ)

= - پ₂ دَ - - - - - - - - (۳)

د کے گرد معیارِ اثر لینے سے

جُفت کا معیارِ اثر = (پ₂ × بَ) - پ₁ (دَ + بَ)

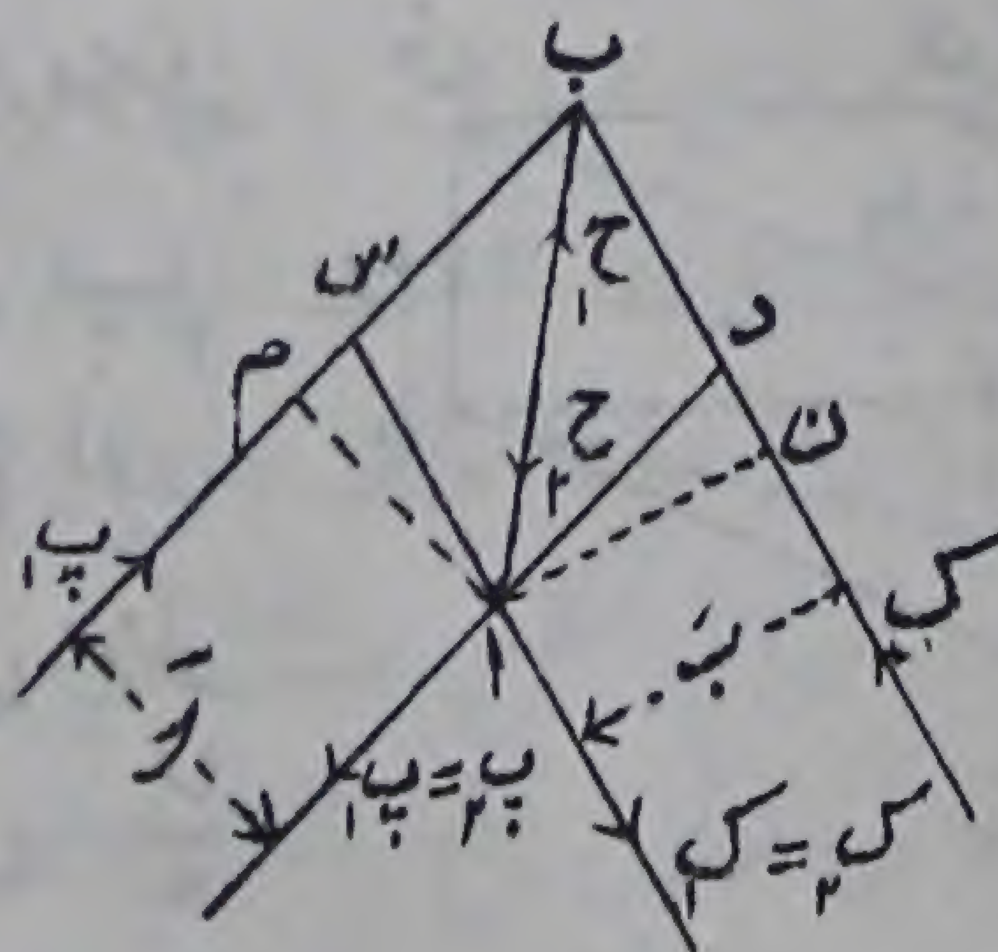
= - پ₁ دَ - - - - - - - - (۴)

چونکہ پ₁ اور پ₂ مساوی ہیں اِس لئے یہ چاروں نتیجے عینی ہیں، اور اِس طرح یہ مسئلہ ثابت ہو گیا۔ قوتوں کے درمیان عمودی فاصلہ دَ جُفت کا **بازُو** کہلاتا ہے۔

جفت کا موازن :- ایک جُفت کا تسویہ (ا) اُسی کے مستوی میں یا (ب) متوازی مستوی میں عمل کرنے والے مساوی اور مخالف معیارِ اثر کا ایک دُوسرے جُفت سے ہو سکتا ہے۔

(ا) شکل نمبر ۱۴۹ دیکھو جس میں مساوی قوتوں پ₁ اور پ₂ اور بازُو اَ والا ایک ساعت دار جُفت اور مساوی قوتوں ک₁ اور ک₂ اور بازو بَ والا ایک غیر ساعت دار جُفت دکھایا گیا ہے۔ دونوں جُفت کاغذ کے مستوی میں عمل کرتے ہیں اور معیارِ اثر پ₁ اَ اور ک₁ بَ مساوی دیے گئے ہیں یعنی

ک₁ : پ₁ = اَ : بَ - - - - - (۱)



شکل ۱۴۹۔ مساوی اور مخالف جفت ایک ہی مستوی میں توازن میں ہیں۔

چاروں قوتوں کے خطوط کو بڑھاؤ کہ وہ اَبَ، س اور د پر قطع کریں۔ ا سے ا م اور ا ن علی الترتیب پ۱ اور ک۱ پر عمود کھینچو۔ تو ا م = اَ اور ا ن = بَ

پس ا س : ا د = ا م : ا ن = اَ : بَ ---(۲)

اس لئے (۱) اور (۲) سے

ک۱ : پ۱ = ا س : ا د --------- (۳)

اب ا س اور ب د مساوی ہیں اور ا د اور ب س بھی مساوی ہیں کیونکہ ایک متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلع ہیں پس ہم پ۱ کو س ب سے، پ۲ کو د ا سے ک۱ کو د ب سے اور ک۲ کو س ا سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ پ۱ اور ک۱ نقطۂ ب پر عمل کرتے ہیں تو اُن کا حاصل ح۱ وتر ا ب سے تعبیر ہوگا۔ فرض کرو کہ پ۲ اور ک۲ نقطۂ ا پر عمل کرتے ہیں تو اُن کا حاصل ح۲ وتر ب ا سے تعبیر ہوگا۔ چونکہ ح۱ اور ح۲ مساوی، مخالف اور ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں اس لئے وہ ترازو ہو جاتے ہیں اور اس لئے دیے ہوئے جُفت بھی ترازو ہو جاتے ہیں۔

(ب) شکل نمبر ۱۵۰ میں ایک مستطیل گُندا ہے جس میں ا د اور ب س پر علی الترتیب دو مساوی قوتیں پ۱ اور پ۲ عمل کرتی ہیں اور دوسری مساوی قوتیں پ۱ اور پ۲ پچھلے کناروں ف ج اور ی ہ پر عمل کرتی ہیں۔ چونکہ یہ تمام قوتیں مساوی ہیں اس لئے گُندا متوازی مستویوں میں دو مساوی اور مخالف جُفتوں کے

شکل نمبر ۱۵۰۔ متوازی مستویوں میں مساوی مخالف جُفت توازن میں ہیں

زیرِ عمل ہے۔
قوتوں پ پ۱ کا حاصل ح ہ والے رُخ پر عموداً عمل کریگا اور وتر د ج کی تنصیف کریگا۔ اسی طرح پ۲ پ۲ کا حاصل ح۲ وتر ب ی کی تنصیف کریگا اور بالائی رُخ پر عمود وار ہوگا۔ ظاہر ہے کہ ح۱ اور ح۲ مساوی اور مخالف ہیں اور وہ ایک ہی خطِ مستقیم میں عمل کرتے ہیں، اِس لئے وہ ترازو ہو جاتے ہیں اور اِس لئے دیے ہوئے جفت بھی ترازو ہیں۔

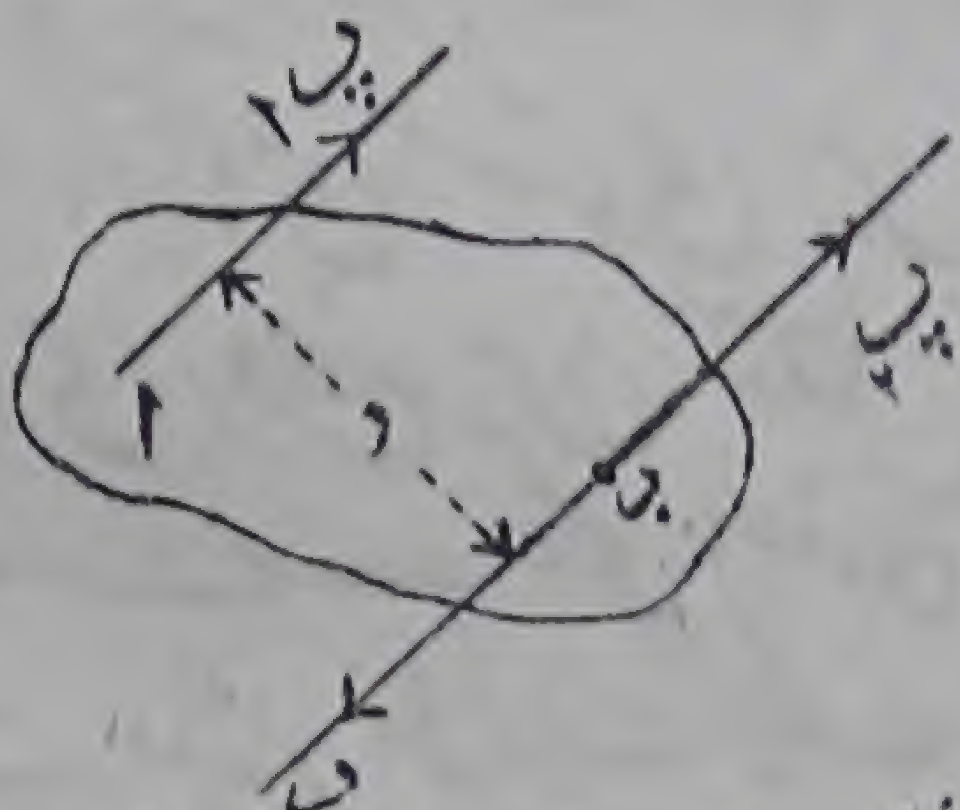
اُسی مستوی میں یا کسی متوازی مستوی میں کسی دُوسری وضع میں منتقل کرنے سے جُفت کا اثر غیر متغیر رہتا ہے ۔۔ اُسی مستوی میں یا متوازی مستوی میں مساوی اور مخالف معیارِ اثر والے ایک دُوسرے جُفت کو استعمال کر کے ایک جُفت ترازو کیا جا سکتا ہے۔ پس اِس سے معلوم ہوا کہ اگر دُوسرا جُفت منقلب کر دیا جائے تو جسم پر اُس کا اثر پہلے جُفت جیسا ہوگا۔ پس اِس طرح سے منقلب دُوسرا جفت پہلے جفت کے بجائے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ بالفاظِ دیگر پہلا جُفت اُسی مستوی میں یا متوازی مستوی میں جسم پر بہ حیثیتِ مجموعی اُس کا اثر بدلے بغیر کسی نئی وضع میں منتقل کیا جا سکتا ہے۔

مزید براں یہ ضروری نہیں ہے کہ دُوسرے جفت کی قوتیں پہلے جفت والی قوتوں کے مساوی ہوں۔ اِس امر کی بنا پر ہم یہ بیان کر سکتے ہیں کہ کسی دیے ہوئے جُفت کی قوتوں کی قدر بدلی جا سکتی ہے بشرطیکہ بازو بھی اُسی کے ساتھ ساتھ بدل دیا جائے تاکہ جُفت کا معیارِ اثر غیر متغیر رہے۔ چنانچہ شکل نمبر ۱۵۱ میں اگر رُخ ی ف ج ہ پر عمل کرنے والے جُفت کی قوتیں رُخ ا ب س د پر عامل جُفت کی قوتوں کے غیر مساوی ہوں تو جُفت کے بازو برابر کر کے قوتوں میں تساوی پیدا کی جا سکتی ہے۔

اِس کُلیہ کی کہ ہر عمل کے لئے ہمیشہ ایک مساوی اور متضاد ردِّ عمل ہوتا ہے اب توسیع یوں کی جا سکتی ہے کہ ہر جفت کے لئے ایک مساوی اور متضاد جفت ہوتا ہے خواہ وہ اُسی مستوی میں عمل کرے یا متوازی مستوی میں۔

ایک ہی مستوی یا متوازی مستویوں میں جُفتوں کی ترکیب:-

ایک جسم پر اور ایک ہی مستوی یا متوازی مستویوں میں عمل کرنے والے متعدد جُفتوں کی ترکیب اِس طرح ہو سکتی ہے کہ اُن کی بجائے صرف ایک جُفت لیا جائے جس کا معیارِ اثر دیے ہوئے جُفتوں کے اثری معیاروں کے جبری مجموعے کے مساوی ہو۔ یہ حاصل جُفت خواہ دیے ہوئے مستوی میں عمل کرے یا دیے ہوئے مستوی کے متوازی مستوی میں۔ بہر حال بہ حیثیتِ مجموعی جسم پر اثر غیر متغیر رہیگا۔



شکل ۱۵۱ - دیے ہوئے خطِ عمل کے متوازی خط میں قوت کا انتقال۔

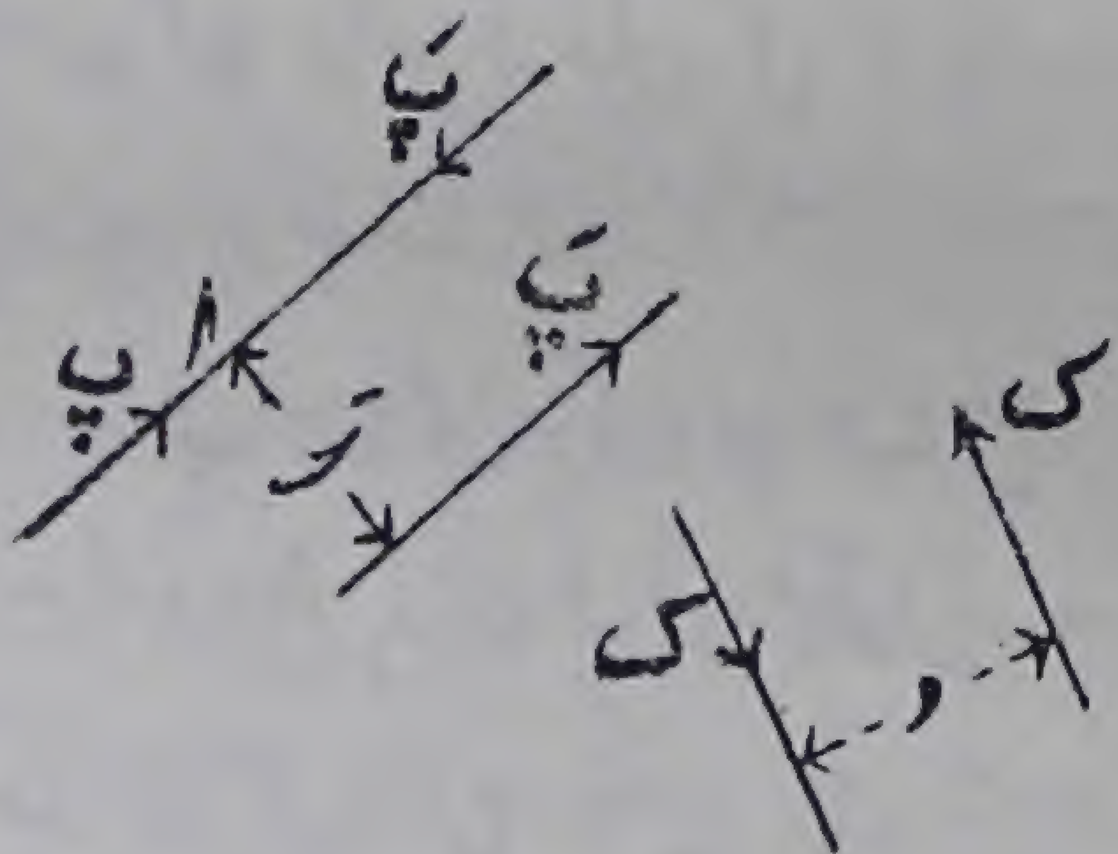
دی ہوئی قوت کی بجائے ایک قوت اور جُفت کا استبدال:-

شکل ۱۵۱ میں ایک جسم دکھایا گیا ہے جس میں ایک قوت پ نقطہ ا پر عمل کرتی ہے۔ بالفرض اگر سہولت اِس میں ہو کہ پ، ایک دُوسرے نقطہ ب پر عمل کرے تو اِس تبدیلیٔ وضع کے پیدا کرنے کے لئے فرض کرو کہ پ کے مساوی دو مخالف قوتیں پ۱، پ۲ نقطہ ب پر پ کے متوازی خط میں عمل کرتی ہیں۔ قوتیں پ۱، پ۲ ترازو ہو جائینگی اور اِس لئے جسم کی دی ہوئی حالت پر اثر نہ ڈالینگی۔ فرض کرو کہ پ اور پ۲ کے خطوں میں عمودی فاصلہ د ہے۔ نیچے والی

قوت پ۲ قوت پ۱ کے ساتھ مل کر ایک جُفت بناتی ہے جس کا معیارِ اثر پ۱ د ہے۔ یہ جُفت اسی مستوی میں ہر وضع میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔ جس سے نقطہ ب پر ایک عاملہ قوت پ۳ رہ جائیگی اور دی ہوئی قوت پ۱ کے مساوی ہم جہت اور ہم سمت ہوگی۔ پس ایک دی ہوئی قوت ایک ہم جہت مساوی متوازی قوت کے اور ایک جُفت کے مُعادِل ہے جس کا معیارِ اثر دی ہوئی قوت اور متوازی قوتوں کے خطوط کے درمیان عمودی فاصلے کے حاصلِ ضرب کے مساوی ہے۔

ایک دی ہوئی قوت اور دئے ہوئے جُفت کا ایک قوت سے استبدال

:- شکل ۱۵۲ میں ایک قوت پ نقطہ ا پر عمل کرتی دی گئی ہے۔ نیز ایک جُفت ہے جس میں قوتیں ک، ک اور بازو د ہے۔ اس نظام کو ایک قوت منفردہ میں اس طرح تحویل کر سکتے ہیں کہ جُفت کی قوتیں اس طرح بدلیں کہ ہر ایک پ کے مساوی ہو جائے۔ ساتھ ہی اس کے



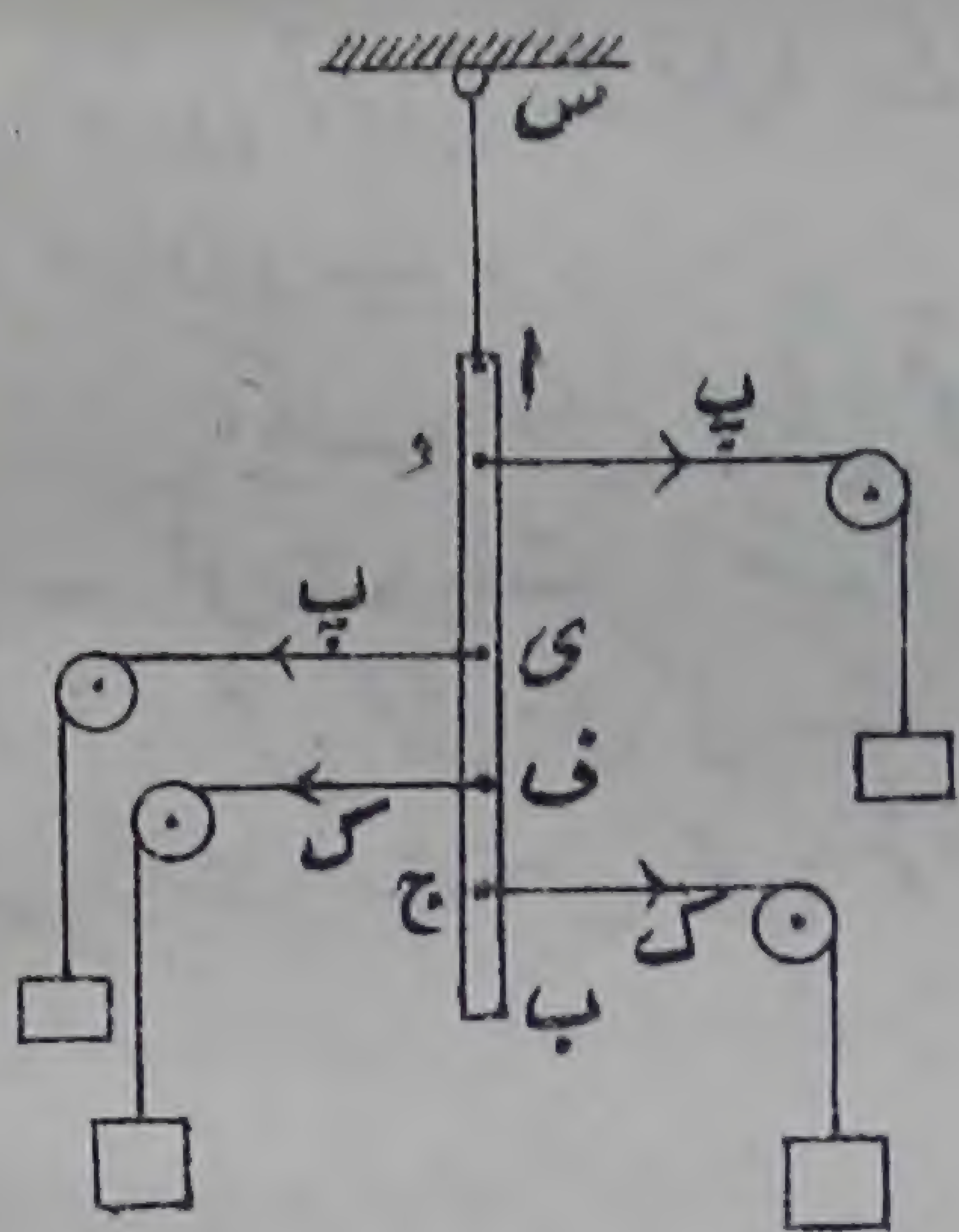
شکل ۱۵۲۔ دی ہوئی قوت اور جُفت کی تحویل قوتِ منفردہ میں

$$ک\ د = پ\ رَ$$

کرکے، جہاں رَ نئے جُفت کا بازو ہے، جُفت کے معیارِ اثر کو غیر متغیر رکھیں۔ فرض کرو کہ جُفت کی نئی قوتیں پَ اور پَ ہیں۔ اس جُفت کو اس طرح استعمال کرو کہ اس کی ایک قوت اُسی خط میں عمل کرے جس میں کہ دی ہوئی قوت پ عامل ہے۔ اور اس کی جہت پ کی جہت کے مخالف ہو۔ تو ا پر عاملہ پ اور پَ ترازو ہو جاتے ہیں جس کی وجہ سے پ کے ہم جہت

ایک قوت پ بچ رہتی ہے جو پ کے متوازی ایک خط میں عمل کرتی ہے اور جو پ کے خط سے عمودی فاصلہ اَ پر ہے۔

تجربہ ۲۳:۔ دو مساوی مخالف جفتوں کا توازن:۔ شکل ۱۵۳ میں ایک سلاخ اب دکھائی گئی ہے جو ا پر ایک ڈورے سے اور س پر ایک ثابت سہارے سے لٹکی ہوئی ہے۔ ڈوروں، چرخیوں اور وزنوں کی مدد سے دو مساوی، مخالف اور متوازی قوتیں پ، پ اور نیز ایک دوسرا جوڑا ک، ک لگاؤ۔ یہ تمام قوتیں اُفقی ہیں۔ ان قیمتوں کو اس طرح رکھو کہ ذیل کی شرط پوری ہو جائے:۔



شکل ۱۵۳۔ جفتوں پر تجربہ

پ × دی = ک × ف ج

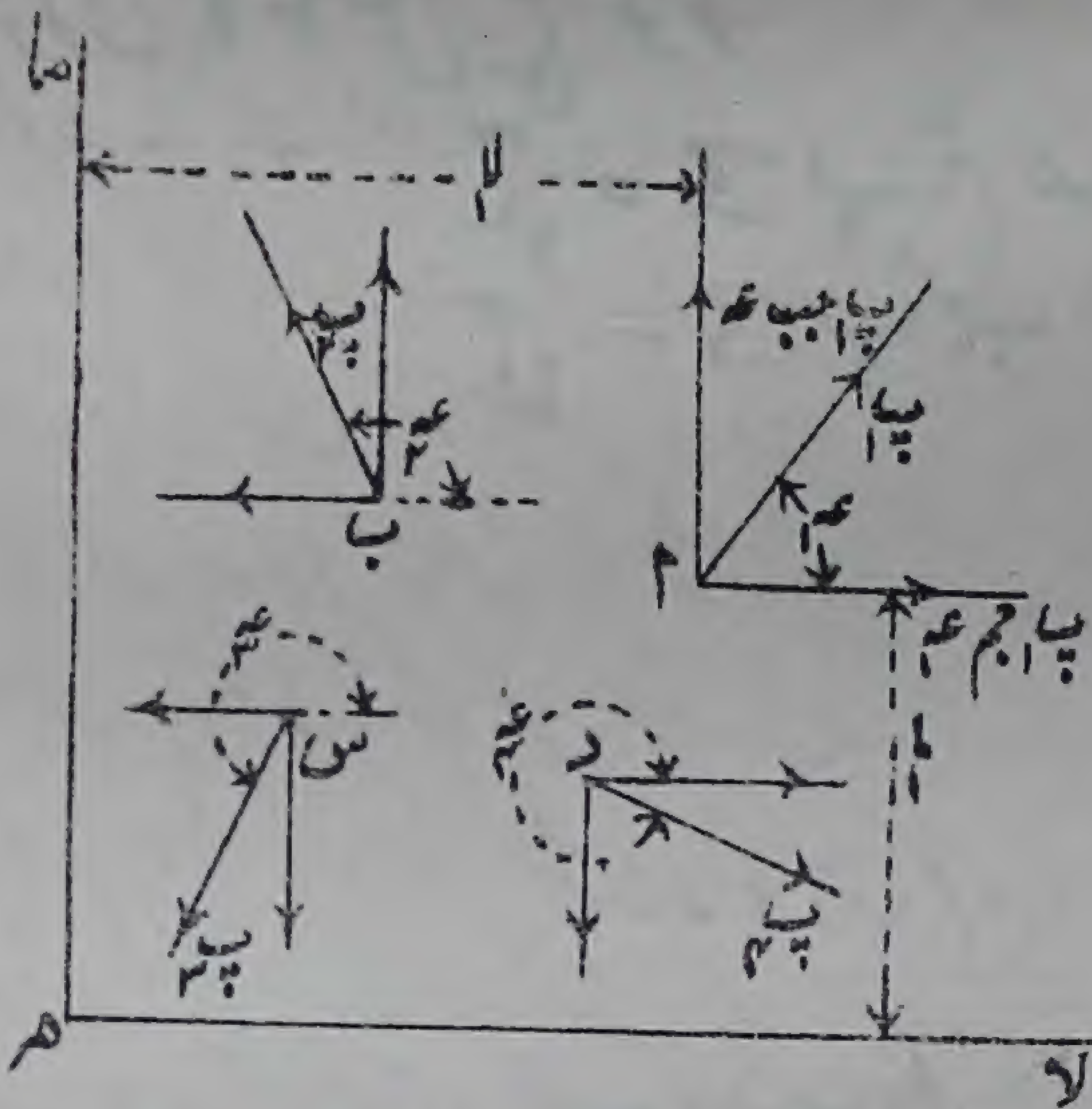
واضح رہے کہ ان قوتوں کے زیرِ عمل سلاخ ساکن رہتی ہے۔

تجربہ کو دہراؤ، قوتوں پ، پ کو اُفقی سے کسی زاویے پر مائل کر دو اور متوازی قوتوں ک، ک کو ایک دوسرے زاویے پر مائل کرو لیکن اس بات کا لحاظ رکھو کہ پ، پ جفت کا معیارِ اثر ک، ک جفت کے معیارِ اثر کے مساوی ہو۔ دیکھو کہ ان جفتوں کے زیرِ عمل سلاخ ترازو ہو جاتی ہے یا نہیں۔

صرف پ، پ جفت استعمال کرو اور اُنگلی سے ایک بار ڈھکیل کر آزما کے دیکھو کہ آیا یہ ممکن ہے کہ سلاخ شکل ۱۵۳ میں دکھائی ہوئی انتصابی وضع میں حالتِ توازن اختیار کر سکتی ہے۔

یک مستوی قوتوں کے کسی نظام کی تحویل:۔

شکل ۱۵۴ میں چار مثالی قوتیں پ۱، پ۲، پ۳ اور پ۴ کاغذ کے مستوی میں علی الترتیب ا، ب، س، اور د پر عامل دی ہوئی ہیں۔ کاغذ کے مستوی میں کوئی دو مستطیل محور م لا اور م ما لے لو۔ اور قوتوں کے سمتی زاویوں ع۱، ع۲ وغیرہ کو م لا سے شمار شدہ سمجھو۔ ہر قوت کو م لا اور م ما کے متوازی اجزاء میں تحلیل کرو۔ چنانچہ پ۱ کے اجزاء پ۱ جم ع۱ اور پ۱ جب ع۱ ہونگے۔



شکل ۱۵۴۔ یک مستوی قوتوں کا نظام

م لا پر ہر وہ جزو جو م لا کے متوازی ہے منتقل کردو اور اسی طرح م ما پر ہر وہ جزو جو م ما کے متوازی ہے منتقل کردو۔ اس سے ہر جزو منتقلہ کے عوض ایک جفت حاصل ہو جائیگا۔ چنانچہ پ۱ جم ع۱ کے منتقل کرنے سے جفت (پ۱ جم ع۱) ما۱ حاصل ہوگا اور پ۱ جب ع۱ کے منتقل کرنے سے جفت (پ۱ جب ع۱) لا۱ حاصل ہوگا۔ ان جفتوں میں بعض ساعت وار ہونگے اور بعض غیر ساعت وار۔

حاصل معیارِ اثر دریافت کرنے کے لئے م لا کے متوازی ساز کا جبری مجموعہ لو اور اسی طرح م ما کے متوازی ساز کا جبری مجموعہ لو جس سے

م لا کے متوازی جفتوں کا حاصل معیارِ اثر = Σ (پ جم ع) ما

م ما کے متوازی جفتوں کا حاصل معیارِ اثر = Σ (پ جب ع) لا

حاصل ہوگا۔

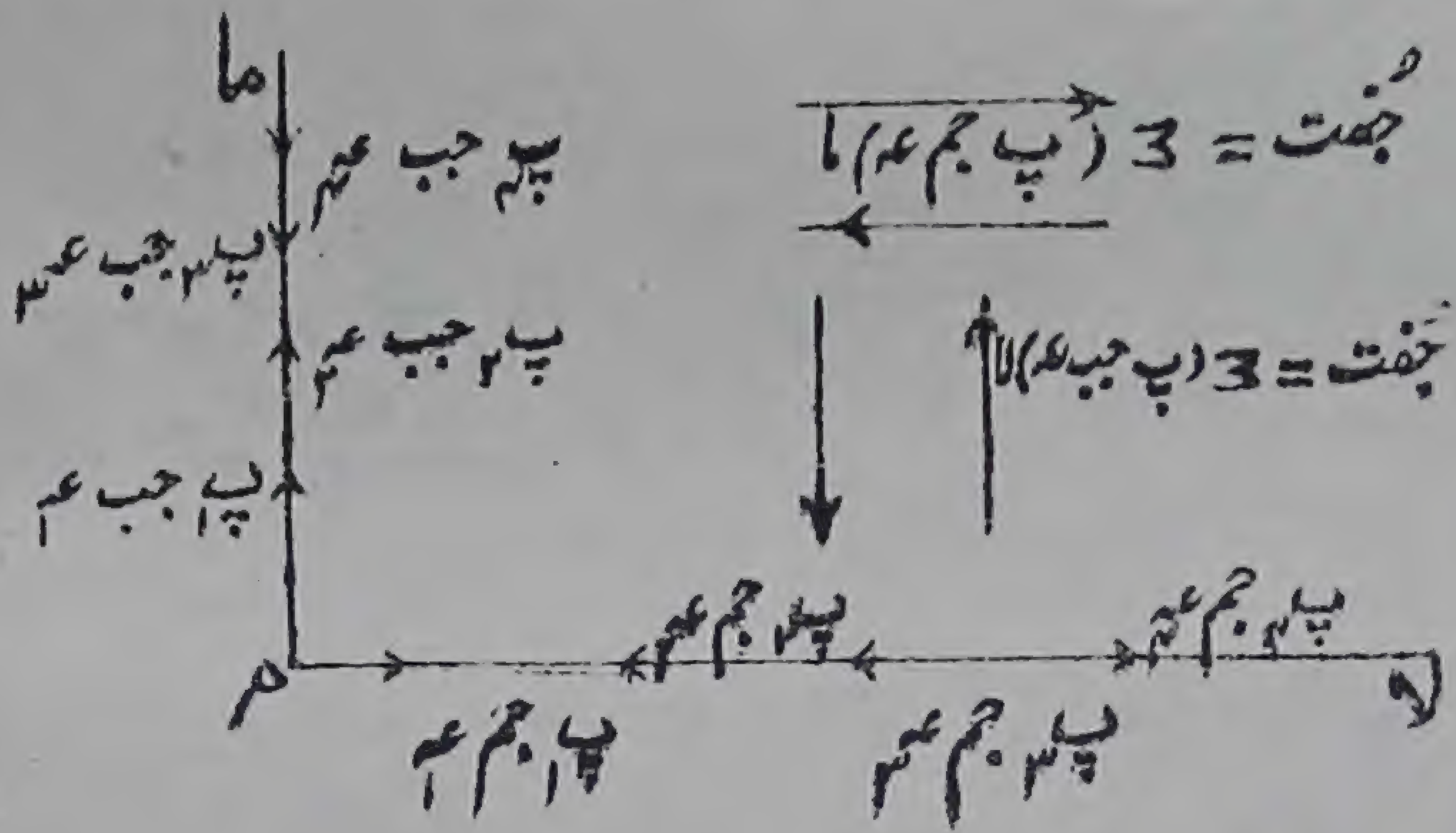
جہاں تک ہم پہنچے ہیں اس نظام کی تحویل شکل ۱۵۵ میں

دی ہوئی ہے۔ جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ کچھ قوتیں م لا پر ہیں، کچھ م ما پر اور دو جُفت ہیں۔

م لا پر والی قوتوں کا حاصل ح لا لے لو اور نیز م ما پر والی قوتوں کا حاصل ح ما لو تو

ح لا = Σ پ جم عہ — — — — — — (۱)

ح ما = Σ پ جب عہ — — — — — — (۲)



شکل ۱۵۵۔ ایک نظام جو شکل ۱۵۴ کے نظام کے معادل ہے۔

اِن قوتوں کا حاصل ح یہ ہے۔

ح = √(ح لا² + ح ما²) — — — — — — (۳)

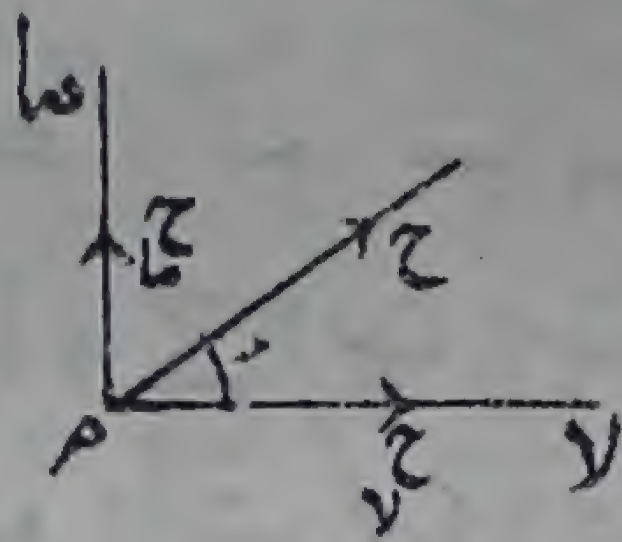
زاویہ عہ جو ح محور م لا سے بناتا ہے یہ ہے

مس عہ = ح ما / ح لا — — — — — — (۴)

نظام اب ایک قوت ح اور دو جُفتوں میں تحویل ہو گیا ہے۔ دونوں جُفتوں کا حاصل معیارِ اثر لس جُفتوں کو جبری طریقہ

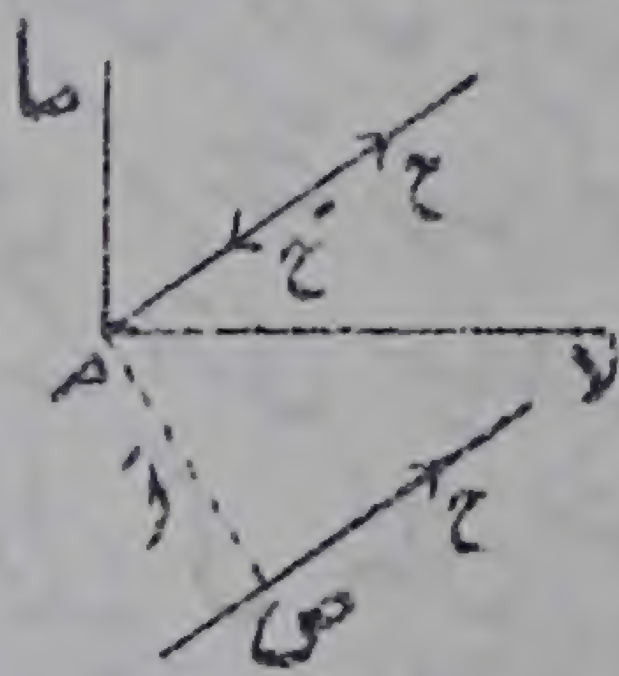
پر جمع کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے، چنانچہ
لم = ∑ (پ جم عہ) ا + ∑ (پ جب عہ) ا ---(۵)
اس حاصل جفت کی ہر قوت کو ح کے مساوی کر دو اور فرض کرو کہ بازو اَ ہے تو

ح اَ = لم یا اَ = لم/ح ------ (۶)



شکل ۱۵۶

اب جفت کو اس طرح استعمال کرو کہ اس کی قوتوں میں سے ایک قوت حَ م اُسی خط میں ہو جس میں کہ ح ہے اور م پر عمل کرے اور ح کے مخالف ہو۔ تو دوسری قوت م سے عمودی فاصلہ م ص = اَ پر ہوگی۔ ظاہر ہے کہ م پر دونوں قوتیں ح اور حَ ترازو ہو جاتی ہیں۔ پس دیا ہوا نظام ایک قوت ح میں تحویل ہو گیا۔



شکل ۱۵۷۔ نظام کا حاصل

خاص صورتیں :-

مساوات (۱)، (۲) اور (۵) کے چند خاص حل محلِ نظر ہیں۔ فرض کرو کہ (۵) میں جو نتیجہ دیا ہے وہ صفر ہو۔ تو نظام م پر عاملہ ایک قوت میں تحویل ہو جاتا ہے۔ اگر (۲) سے بھی صفر حاصل ہو تو نظام م لا پر عاملہ ایک قوت میں تحویل ہو جائیگا اور اگر (۱) صفر ہو تو

م ما پر عاملہ ایک قوت میں تحویل ہو جائیگا۔

اگر (۵) سے ایک عددی نتیجہ حاصل ہو اور (۱) اور (۲) دونوں صفر ہوں تو نظام ایک جُفت میں تحویل ہو جائیگا۔

توازن کے لئے نہ تو کوئی حاصل قوت ہونی چاہیئے اور نہ کوئی حاصلِ جُفت۔ پس ہر سہ مساوات سے صفر حاصل ہونا چاہیئے۔ اب توازن کے شرائط یوں لکھے جا سکتے ہیں:۔

Σ پ جم عہ = ۰ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ (۱)

Σ پ جب عہ = ۰ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ (۲)

Σ (پ جم عہ) ما + Σ (پ جب عہ) لا = ۰ ـــ ـــ ـــ (۳)

یہ مساواتیں بہ یک وقت پُوری ہونی چاہئیں اور یک مستوی قوتوں کے کسی نظام کے توازن کی آزمائش کے لئے کار آمد ہونگی۔

متعلم کو یہ معلوم ہُوا ہوگا کہ مساوات (۱) اور (۲) اِس شرط کو ظاہر کرتی ہیں کہ بہ حالتِ توازن کسی جسم پر ایک قوتی نظام کے عمل کرنے کا نتیجہ نقلِ مکان نہ ہونا چاہیئے۔ یہ صورت اُس وقت پیدا ہوتی جب کہ ح لا، ح ما دونوں یا اِن میں سے ایک کی قیمت سوائے صفر کے کچھ اَور ہوتی۔ مساوات (۳) سے یہ شرط ظاہر ہوتی ہے کہ قوتوں کے عمل کا نتیجہ جسم میں محوری گردش نہیں پیدا کرتا۔ واضح رہے کہ مساوات (۳) کی تعبیر ہم یوں بھی کر سکتے ہیں کہ وہ کسی قرارداد نقطہ م کے گرد دی ہوئی قوتوں کے اجزاء کے اثری معیاروں کا جبری مجموعہ ہے۔

ذیل کی مثالی مشقیں بہ غور مطالعہ کی جانی چاہئیں۔ کسی جسم یا حصۂ جسم کا توازن دریافت کرتے وقت اِس بات کا لحاظ رکھنا چاہیئے کہ خاکے میں صرف وُہی قوتیں دکھائی جائیں جو جسم پر خارج سے عمل کرتی ہیں نہ کہ وہ قوتیں جن سے جسم خود دُوسرے جسموں پر عمل کرتا ہے۔

مثال نمبر ۱ :۔ اب اور ب س دو چکنے مستوی ہیں جو اُفق سے علی الترتیب ۴۵° اور ۳۰° پر مائل ہیں [شکل نمبر ۱۵۸ (ا)]۔ د ی

۳ فٹ طول کی ایک یکساں سلاخ ہے جس کا وزن ۴ پونڈ ہے اور جو ۲ پونڈ وزنی ایک جسم ف کے ذریعہ سے اُفقی وضع میں قائم ہے۔ بتاؤ کہ ف کہاں رکھا جائے۔

چونکہ مستوی ملیس ہیں اِس لئے مستویوں کے ردِّ عمل پ اور ک علی الترتیب اب اور ب س پر عمود وار ہیں۔ ہر قوت کو اُفقی اور انتصابی اجزاء میں تحلیل کر لو۔ اِس طرح کہ

$$\text{پ}_{\text{لا}} = \text{پ جب } ۴۵^\circ = \frac{\text{پ}}{\sqrt{۲}} \text{ ؛ } \text{پ}_{\text{ا}} = \text{پ جم } ۴۵^\circ = \frac{\text{پ}}{\sqrt{۲}}$$

$$\text{ک}_{\text{لا}} = \text{ک جب } ۳۰^\circ = \frac{\text{ک}}{۲} \text{ ؛ } \text{ک}_{\text{ا}} = \text{ک جم } ۳۰^\circ = \frac{\text{ک}\sqrt{۳}}{۲}$$

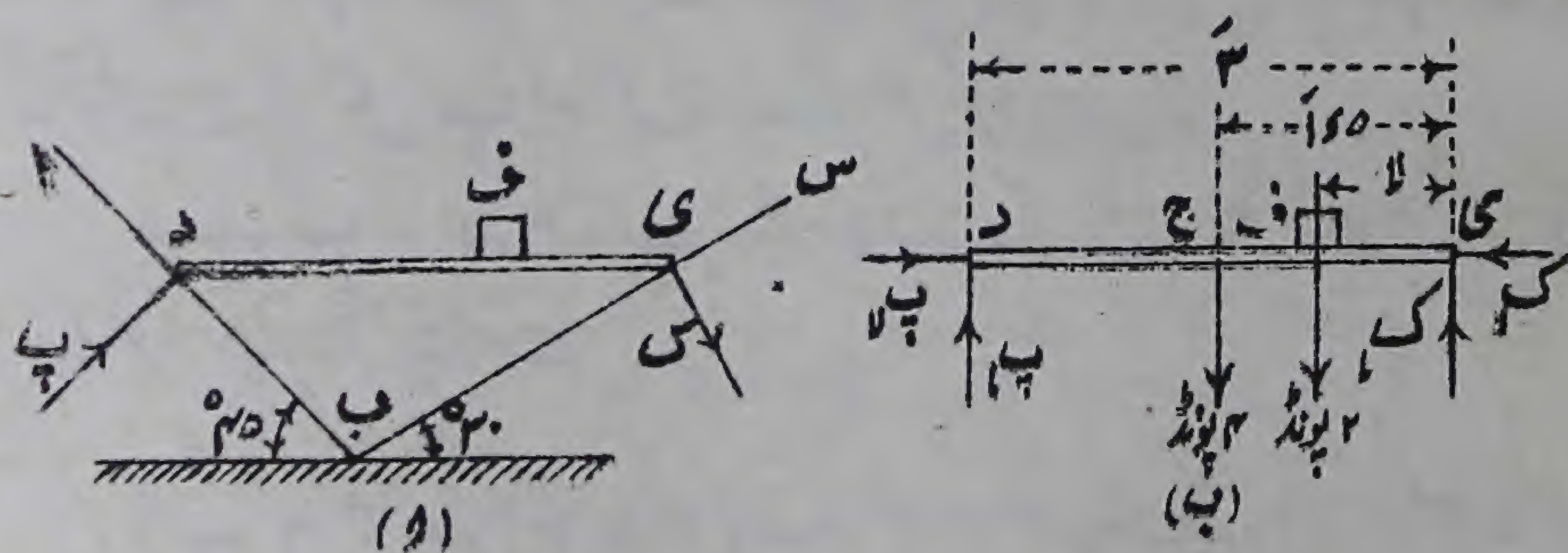
سلاخ پر جو قوتیں اب عمل کرتی ہیں وہ شکل ۱۵۸ (ب) میں دکھلائی گئی ہیں۔ توازن کے لئے

$$\text{پ}_{\text{لا}} - \text{ک}_{\text{لا}} = ۰ \text{ ؛ } \therefore \text{پ}_{\text{لا}} = \text{ک}_{\text{لا}} \quad \text{-----} \quad (۱)$$

$$\text{پ}_{\text{ا}} + \text{ک}_{\text{ا}} - ۴ - ۲ = ۰ \text{ ؛ } \therefore \text{پ}_{\text{ا}} + \text{ک}_{\text{ا}} = ۶ \quad \text{-----} \quad (۲)$$

ی کے گرد معیارِ اثر لینے سے

$$(\text{پ}_{\text{ا}} \times ۳) - (۴ \times ۱\tfrac{۱}{۲}) - ۲\,\text{لا} = ۰ \text{ ؛ } \therefore ۳\,\text{پ}_{\text{ا}} = ۶ + ۲\,\text{لا} \quad \text{---} \quad (۳)$$



شکل ۱۵۸ ۔ ایک سلاخ جو دو مستویوں پر قائم ہے

(۱) سے
$$\frac{\text{پ}}{\text{۲لا}} = \frac{\text{ک}}{\text{۲}} \quad \text{------ (۴)}$$

(۲) سے
$$\frac{\text{پ}}{\text{۲لا}} + \frac{\text{ک}\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}} = \text{۶} \quad \text{------ (۵)}$$

پس
$$\frac{\text{پ}}{\text{۲لا}} + \frac{\text{پ}}{\text{۲لا}}\cdot\sqrt{\text{۳}} = \text{۶} \quad \therefore \text{پ} = \frac{\text{۶ ۲لا}}{\sqrt{\text{۳}}+\text{۱}}$$

$$\therefore \text{پ لا} = \frac{\text{پ}}{\text{۲لا}} = \frac{\text{۶}}{\sqrt{\text{۳}}+\text{۱}} \quad \text{------ (۶)}$$

(۳) میں اس قیمت کو درج کرنے سے

$$\frac{\text{۱۸}}{\sqrt{\text{۳}}+\text{۱}} = \text{۶} + \text{۲ لا}$$ حاصل ہوا

جس سے $\text{لا} = \text{۲۹۴ء}$ فٹ

مثال ۲ :- شکل ۱۵۹ (۱) میں اب اور اس دو یکساں سلاخیں ہیں اور ہر ایک ۱۰ پونڈ وزنی اور ۶ فٹ لمبی ہے۔ سلاخیں ملاست کے ساتھ ا پر وصل ہیں۔ اور ایک ملیس اُفقی سطح پر ب اور س کے بل قائم ہیں۔ ب اور س ۴ فٹ لمبے ایک اَن کھنچ ڈورے کے ذریعہ سے ملے ہوئے ہیں۔ د پر ۴۰ پونڈ وزن کا ایک بوجھ لٹکا ہے۔ تو ب د کی رقموں میں ڈورے کا تناؤ اور جوڑ ا پر کے ردِّ عمل معلوم کرو۔

پہلے اب س کو ایک اُستوار جسم مان لو جس پر ۱۰، ۴۰، اور ۱۰ پونڈ وزن کی قوتیں مع ردِّ عمل پ اور ک کے عمل کرتی ہیں تو

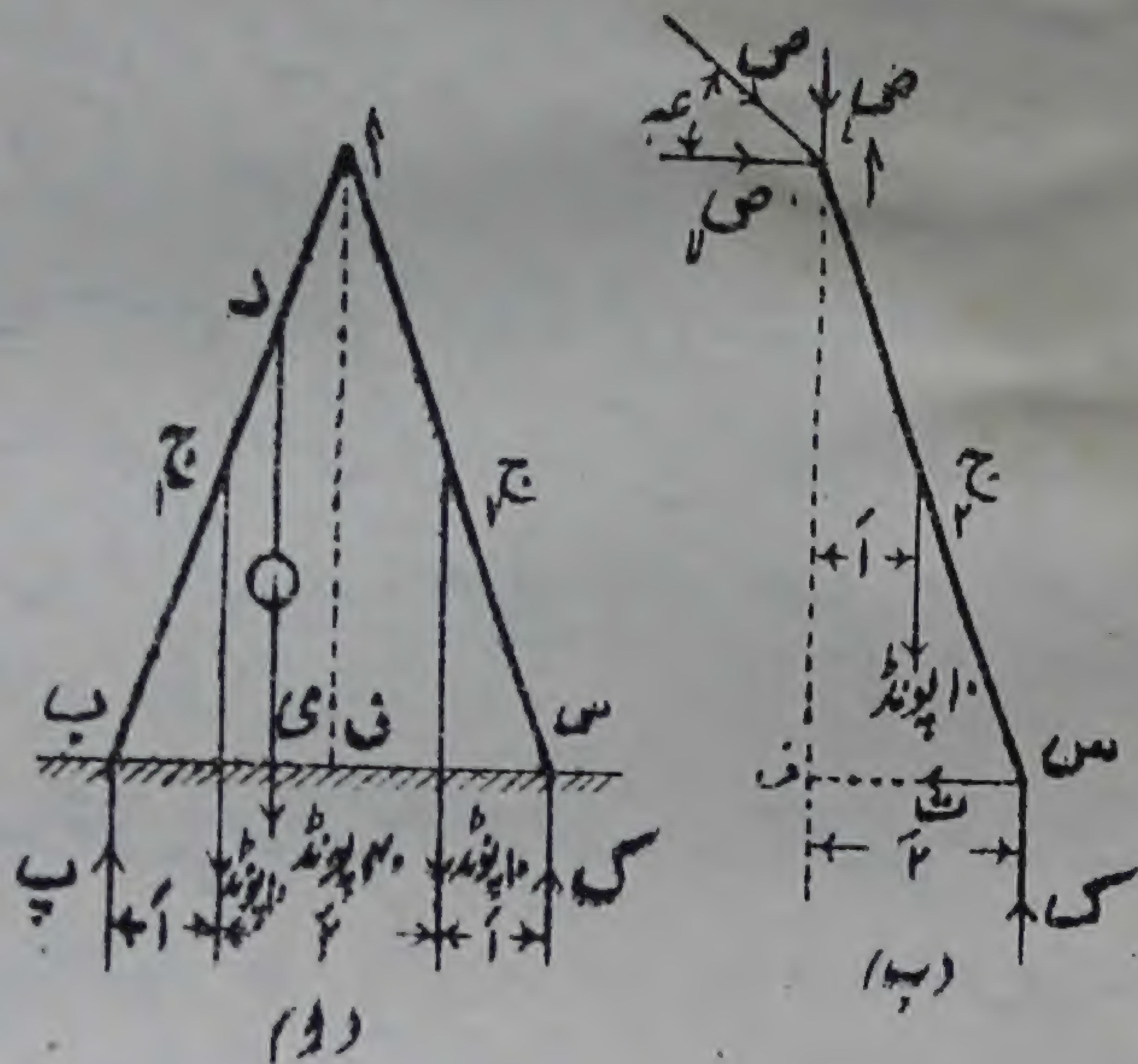
$$\text{پ} + \text{ک} - \text{۱۰} - \text{۴۰} - \text{۱۰} = \text{۰} \quad \therefore \text{پ} + \text{ک} = \text{۶۰} \quad \text{--- (۱)}$$

س کے گرد معیارِ اثر لینے سے

$$(\text{پ} \times \text{۴}) - (\text{۱۰} \times \text{۳}) - (\text{۴۰} \times \text{س ی}) - (\text{۱۰} \times \text{۱}) = \text{۰}$$

$$\therefore \text{۴ پ} = \text{۳۰} + \text{۱۰} + \text{۴۰} \times \text{س ی}$$

$$\text{پ} = \text{۱۰} + \text{۱۰ س ی} \quad \text{------ (۲)}$$



شکل ۱۵۹ - دو سلاخوں کا توازن

(۱) سے ک = ۶۰ - پ = ۶۰ - ۱۰ - ۱۰ س ی

= ۵۰ - ۱۰ س ی - - - - - - - (۳)

نیز س ی = ب س - ب ی = ۴ - ب ی

ب س پر ا ف عمود کھینچو، تو متشابہ مثلث ب ی د، ب ف ا میں

$$\frac{\text{ب ی}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ب ف}}{\text{ب ا}} = \frac{۲}{۶}$$

∴ ب ی = $\frac{۱}{۳}$ ب د

∴ س ی = ۴ - $\frac{۱}{۳}$ ب د

پس (۲) اور (۳) سے، پ = ۱۰ + ۱۰ (۴ - $\frac{۱}{۳}$ ب د)

= ۵۰ - $\frac{۱۰}{۳}$ ب د - - - - - (۴)

اور ک = ۵۰ - ۱۰ (۴ - $\frac{۱}{۳}$ ب د)

= ۱۰ + $\frac{۱۰}{۳}$ ب د - - - - - - - (۵)

اب سلاخ ا س کو علیحدہ تصور کرو [شکل ۱۵۹ (ب)]۔ اِس پر عمل کرنے والی قوتیں یہ ہیں، اِس کا وزن جو اِنتصاباً ج پر عمل کرتا ہے، س پر انتصابی ردِّ عمل ک، ڈورے ب س کی اُفقی کھنچ ت اور ا پر ردِّ عمل ص ــ ص دوسری سلاخ ا ب کا عمل ہے۔ اور اِس کی سمت قیاساً شکل ۱۵۹ (ب) میں دکھائی گئی ہے۔ صحیح سمت مابعد کے حسابات سے معلوم ہوگی۔ ص کو اُفقی اور انتصابی اجزاء $ص_{۱}$ اور $ص_{۲}$ میں تحلیل کرلو اور توازن کے شرائط عائد کرو۔

$$ت - ص_{۱} = ۰ \quad \therefore ت = ص_{۱} \quad ---- (۶)$$

$$ک - ۱۰ - ص_{۲} = ۰ \quad \therefore ک = ۱۰ + ص_{۲} \quad --- (۷)$$

ا کے گرد معیارِ اثر لو، مگر پہلے ا ف کا طول حساباً دریافت کرو:

$$ا ف = \sqrt{ا س^{۲} - س ف^{۲}} = \sqrt{۳۶ - ۴} = \sqrt{۳۲}$$

$$(ک \times ۲) - (۱۰ \times ۱) - (ت \times \sqrt{۳۲}) = ۰$$

$$\therefore ۲ک = ۱۰ + ت\sqrt{۳۲} \quad ------ (۸)$$

(۵) اور (۸) سے:

$$۲(۱۰ + \frac{۱۰}{۳} ب د) = ۱۰ + ت\sqrt{۳۲}$$

$$\therefore ت = \frac{۱۰ + \frac{۲۰}{۳} ب د}{\sqrt{۳۲}}$$

$$= \frac{۳۰ + ۲۰ ب د}{۳\sqrt{۳۲}} \quad ------ (۹)$$

اِس نتیجہ سے ظاہر ہوگا کہ اگر ب د بڑا کر دیا جائے تو ت بڑھ جائیگا۔

پھر (۶) اور (۹) سے:

$$ص_{۱} = ت = \frac{۳۰ + ۲۰ ب د}{۳\sqrt{۳۲}} \quad ---- (۱۰)$$

اور (۵) اور (۷) سے:

$$۱۰ + \frac{۱۰}{۳} ب د = ۱۰ + ص_{۲}$$

∴ ص = ½ ب د - - - - - - (۱۱)

(اس نتیجہ کی مثبت علامت سے ظاہر ہوگا کہ ص کی سمت جو فرض کی گئی تھی وہ صحیح تھی)۔

(۱۰) اور (۱۱) سے:

ص = √(ص۱² + ص۲²)

= √(۳۶۰۰ ب د² + ۱۲۰۰ ب د + ۹۰۰) / ۲۸۸

نیز زاویہ عہ جو ص اُفقی سے بناتا ہے ذیل سے حاصل ہوتا ہے:

س عہ = ص۲ / ص۱ = (½ ب د) / ((۳۰ + ۲۰ ب د) / ۳√۳۲) = (۱۰ × ب د √۳۲) / (۳۰ + ۲۰ ب د)

مثال ۳:- شکل ۱۶۰ میں ا ب ایک ہلکی سلاخ ہے جس کا کنارا ا کچھ اس طرح بنایا گیا ہے کہ وہ ایک اُفقی خط ا د میں آزادانہ حرکت کرسکتا ہے۔ س پر ایک دوسری ہلکی سلاخ س د ملاست کے ساتھ ا ب سے وصل ہے۔ س د آزادانہ د کے گرد گھوم سکتی ہے۔ ب سے ایک بوجھ و لٹکا ہوا ہے۔ اگر ا س = س د اور ب س = ن × ا س تو بتاؤ کہ ا پر عمل کرنے والے اُفقی اور انتصابی ردِّ عمل کیا ہونے چاہئیں تاکہ اس ترتیب کو یوں قائم رکھ سکیں کہ ا ب اُفقی سے زاویہ تہ بنائے۔

سلاخ ا ب کے توازن پر غور کرو۔ فرض کرو کہ ک وہ ردِّ عمل ہے جو د س نقطہ س پر پیدا کرتا ہے۔ ک کے اُفقی اور انتصابی اجزا لو اور فرض کرو کہ ک۱ اور ک۲ ہیں [شکل ۱۶۱]۔ چونکہ ک۱ اور ا د متوازی ہیں اس لئے ک اور ک۱ کے درمیان زاویہ ا د س ہے۔ نیز زاویے ا د س اور س ا د مساوی ہیں کیونکہ ا س = س د۔ پس ک۱ اور ک کے درمیان زاویہ = تہ اس لئے

ک۱ = ک جم تہ اور ک۲ = ک جب تہ

تو

توازن کے لئے پ - ک₁ = ۰ ∴ پ = ک₁ - - - (۱)
ک₂ - و - ص = ۰ ∴ ک₂ = و + ص - - - (۲)
س کے گرد معیار اثر لینے سے
(پ × س ی) + (ص × ا ی) - (و × س ف) = ۰
∴ (پ × س ی) + (ص × ا ی) = و × س ف - - - (۳)

ب، س، ف، ص، و، ک₁، ک₂، ا، پ، ی، د

شکل ۱۶۰ — شکل ۱۶۱ - اب پر عاملہ قوتیں

(۳) سے پ × اس جب تہ + ص × اس جم تہ = و × ب س جم تہ
اس جم تہ سے اِس مساوات کو تقسیم کرنے پر

پ مس تہ + ص = و $\frac{ب س}{ا س}$ = $\frac{و ن . ا س}{ا س}$ = و ن - - - (۴)

(۲) سے ک جب تہ = و + ص
(۱) سے پ = ک جم تہ یا ک = $\frac{پ}{جم تہ}$
∴ $\frac{پ جب تہ}{جم تہ}$ = پ مس تہ = و + ص - - - (۵)
(۴) میں درج کرنے سے
و + ص + ص = و ن
∴ ۲ص = و ن - و
ص = و $(\frac{ن - ۱}{۲})$ - - - (۶)

پس (۵) اور (۶) سے

$$\text{پ مس تہ} = \text{و} + \text{و}\left(\frac{\text{ن}-۱}{۲}\right)$$

$$\text{پ} = \frac{\text{و}\left[۱ + \frac{\text{ن}-۱}{۲}\right]}{\text{مس تہ}}$$

$$= \frac{\text{ن}+۱}{۲\,\text{مس تہ}}\,\text{و} \quad ----------- (۷)$$

(۶) سے یہ ظاہر ہوگا کہ اگر ن = ۱ یعنی اس، س د اور س ب سب مساوی ہوں [شکل ۱۶۰] تو ص = ۰۔ شکل ۱۶۱ کے دیکھنے سے پتا چلتا ہے کہ ایسی صورت میں و کا خطِ عمل د میں سے گزرتا ہے۔ پس پ، ک اور و ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور ایک قوت ص کے استعمال کی ضرورت لاحق ہوئے بغیر سلاخ ا ب کا تسویہ کر سکتے ہیں۔ اگر ن ایک سے کم ہو تو (۶) سے جو نتیجہ ص کے لئے حاصل ہوگا وہ منفی ہوگا۔ اور ظاہر کریگا کہ ص کو اوپر کی جانب عمل کرنا چاہیئے۔

اِس مسئلہ کا ترسیمی حل اِس امر پر منحصر ہے کہ سلاخ ا ب [شکل ۱۶۱] پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں۔ یعنی و، ک اور پ، اور ص کا حاصل۔ جس نقطہ پر یہ قوتیں ملتی ہیں وہ و اور ک کو بڑھانے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ پ اور ص کا حاصل اِس نقطہ میں سے اور نیز ا میں سے گزریگا۔ بقیہ حل قوتوں کے مثلث کے استعمال سے حاصل ہوتا ہے اور یہ بجائے خود ایک دلچسپ مسئلہ ہے۔

دسویں فصل کی مشقیں

(۱) ۶ انچ در ۲ انچ کی ایک مستطیل تختی کے لمبے کنارے پر ۴۰۰ پونڈ وزن کی ایک قوت عمل پذیر ہے۔ بتاؤ کہ دوسرے کناروں میں سے ہر ایک پر قوتیں لگا کر تختی کو کس طرح ترازو کر سکتے ہیں۔ تختی کے وزن کو نظر انداز کر دو۔

(۲) ایک دروازہ ۱۲۰ پونڈ وزن کا ہے اور اِس کا مرکزِ جاذبہ قبضوں کے محور کے متوازی ایک انتصابی خط پر اور اُس سے ۱۸ انچ کے فاصلے سے

واقع ہے۔ قبضے ۴ فٹ کے فصل سے ہیں اور دروازے کو سنبھالنے کے لئے انتصابی ردّ عمل دونوں میں بہ حصۂ مساوی منقسم ہے۔ ہر قبضہ کا ردِّ عمل معلوم کرو۔

(۳) ایک انتصابی ستون کی چوٹی کے نزدیک ایک دیوار گیر نصب ہے۔ ستون کے محور سے ۸ انچ کے فاصلے پر دیوار گیر کے کنارے سے ۵ ٹن وزن کا ایک بوجھ لٹک رہا ہے۔ اِس بوجھ کو دُور کردو اور اِس کی بجائے قوتوں کا ایک معادل نظام استعمال کرو جس میں ۵ ٹن وزن کی بھی ایک قوت ستون کے محور پر عمل کرتی ہو۔ نظام کا خاکا دکھلاؤ۔

(۴) ایک قائم الزاویہ مثلث بناؤ جس میں ا ب = ۱۶ فٹ اور انتصابی ہو۔ اور ب س = ۱۰ فٹ اور اُفقی ہو۔ یہ مثلث ۱۰ فٹ لمبی اور ۱۴۰ پونڈ فی مکعب فٹ وزن کی ایک دیوار کی عمودی تراش کی تعبیر ہے۔ تو دیوار کی بنیاد کا ردِّ عمل دریافت کرو اِس طرح کہ وہ قاعدے کے مرکز پر عمل کرنے والی ایک قوت اور ایک جفت کے مساوی ہو۔

(۵) ۴ فٹ لمبی ایک سلاخ ا ب میں ا پر ا ب سے ۳۰° کا زاویہ بناتا ہُوا ۲۰ پونڈ وزن کا ایک زور عامل ہے۔ سلاخ پر ایک جُفت بھی عمل کرتا ہے جس کا معیارِ اثر ۴۰ پونڈ فٹ ہے۔ حاصل قوت دریافت کرو۔

(۶) ایک مثلث ا ب س کھینچو۔ مثلث کے ضلعوں پر ترتیب وار قوتیں عمل کرتی ہیں اور ہر قوت کی قدر اِس ضلع کے طول کے متناسب ہے جس پر وہ عمل کرتی ہے۔ قوتوں کے اِس نظام کو سادہ ترین شکل میں تحویل کرو۔

(۷) ۲ فُٹ کنارے والی ایک مربع تختی ا ب س د کے کناروں پر قوتیں حسب ذیل عمل کرتی ہیں: ا سے ب کی طرف ۲ پونڈ وزن کی۔ ب سے س کی طرف ۳ پونڈ وزن کی۔ س سے د کی طرف ۴ پونڈ وزن کی۔ د سے ا کی طرف ۵ پونڈ وزن کی۔ تو حاصل دریافت کرو۔

(۸) ایک یکساں سلاخ ا ب ۴ فُٹ لمبی اور ۲۴ پونڈ وزنی ہے۔ کنارا ا ملاست کے ساتھ ایک ثابت سہارے سے جُڑا ہُوا ہے۔ سلاخ ۴۵° پر

مائل ہے اور اُس کا بالائی کنارا ب ایک ملیس انتصابی دیوار کے سہارے قائم ہے۔ ا سے ا فٹ کے فاصلے پر ۱۰ پونڈ وزن کا ایک بوجھ سلاخ سے آویزاں ہے۔ تو ا اور ب پر ردِّ عمل دریافت کرو۔

(۹) ایک مثلث تساوی الساقین میں اس = س ب ۔ اب ۱۵ فٹ ہے اور اُفقی ہے۔ س انتصاباً ۵ فٹ اب سے اُوپر ہے۔ مثلث کا مستوی انتصابی ہے اور مثلث ا اور ب کے سہارے قائم ہے۔ اس کے مرکز پر ۴۰۰ پونڈ وزن کا ایک بوجھ عامل ہے۔ س پر ۶۰۰ پونڈ وزن کا ایک دُوسرا بوجھ ہے اور ۸۰۰ پونڈ وزن کی ایک قوت ب س کے مرکز پر اور ب س سے ۹۰° پر عامل ہے۔ ب پر سہارے کا ردِّ عمل انتصابی ہے اور ا پر مائل ہے۔ تو دونوں سہاروں کے ردِّ عمل دریافت کرو۔

(۱۰) شکل ۱۶۰ [صفحہ ۲۲۲] میں جو ترتیب دکھائی گئی ہے اس میں اس = س د = ۴ انچ؛ ب س = ۶ انچ۔ تو پ، ص اور ک دریافت کرو جب کہ ۱۰ پونڈ وزن کا ایک بوجھ ب سے آویزاں ہو اور ت کی قیمتیں ۴۵°، ۳۰°، ۱۵°، ۵° ہوں۔

(۱۱) سوال ۱۰ کا جواب دو (ا) اگر ب س = ۴ انچ؛ (ب) اگر ب س = ۳ انچ۔

(۱۲) ب س ۱۲ انچ لمبی ایک سلاخ ہے جو کاغذ کے مستوی میں س پر ایک چکنی سُوئی کے گرد گھوم سکتی ہے۔ ۴ فٹ لمبی ایک دُوسری سلاخ اب ملاست کے ساتھ ب پر ب س سے وصل ہے۔ کنارا ا ایک چکنی نالی میں حرکت کرتا ہے جس کو اگر بڑھائیں تو س میں سے گزرے۔ زاویہ اس ب ۳۰° کا ہے اور اب کے مرکز سے ۲۰۰ پونڈ وزن کا ایک بوجھ آویزاں ہے۔ تو حساباً دریافت کرو کہ ا پر کتنی قوت لگانی چاہیئے تاکہ توازن قائم رہے۔ مسئلہ کو ترسیماً حل کر کے نتیجہ کی تصدیق کرو۔

(۱۳) ۲۰ فٹ لمبی ایک سیڑھی اُفقی سے ۶۰° پر مائل ہے اور زمین پر ا کے سہارے اور ایک دیوار پر ب کے سہارے قائم ہے۔ سیڑھی کا وزن

۸۰ پونڈ ہے۔ اور اُس کا مرکزِ جاذبہ ا سے ۸ فٹ پر ہے۔ زمین اور دیوار کو چکنی فرض کریں تو ا اور ب پر ردِّ عمل علی الترتیب انتصابی اور اُفقی ہونگے۔ سیڑھی کو پھسلنے سے روکنے کے لئے ایک رسی ا پر اور دیوار کی پائیں کے ایک نقطہ پر بندھی ہے۔ ۱۵۰ پونڈ وزنی ایک آدمی سیڑھی پر چڑھتا ہے۔ تو اگر ا سے وہ ۴، ۸، ۱۲، ۱۶ اور ۱۹ فٹ کے فاصلے سے ہو تو رسی کا تناؤ حساباً دریافت کرو۔ ایک ترسیم بناؤ جس میں ا سے شخص کے فاصلے اور تناؤ کا علاقہ دکھاؤ۔

(۱۴) ایک اُستوار جسم کے مختلف نقطوں پر لیکن مخالف سمتوں میں عمل کرنے والی دو غیر مساوی اور متوازی قوتوں کے حاصل دریافت کرنے کا طریقہ بتاؤ۔ اگر دونوں قوتیں مساوی ہوں تو کیا حاصل ایک ہی ہوگا؟

۱۰۰۰ پونڈ وزن کی ایک فولاد کی گول سلاخ انتصاباً ۵ فٹ کے فصل سے دو پتلے ثابت اُفقی تختوں کے ذریعے سے قائم ہے۔ تختوں میں سوراخ ہیں جن میں سے سلاخ گزر سکتی ہے۔ اگر ان سوراخوں کے پہلو چکنے ہوں اور سلاخ کو اس کے محور سے ۲ انچ کے فاصلے پر عمل کرنے والی ایک قوت اٹھائے تو ہر تختے پر کتنا دباؤ ہوگا۔ (جامعۂ دیلاد)

(۱۵) اگر ایک اُستوار جسم پر متعدد یک مستوی قوتیں عمل کریں تو ثابت کرو کہ وہ توازن میں ہونگی بشرطیکہ دو علی القوائم سمتوں میں اُن کے تحلیلی اجزاء کا جبری مجموعہ اور مستوی کے ایک دیئے ہوئے نقطے کے گرد اِن کے اثری معیاروں کا جبری مجموعہ صفر ہو۔

(۱۶) ۱۲ فٹ لمبا اور ۴۰ پونڈ وزنی ایک یکساں تختہ اُفقاً آویزاں ہے۔ اور باہر کی طرف ڈھلواں دو رسیوں کے سہارے قائم ہے۔ رسیاں اُفق سے علی الترتیب ۶۰° اور ۴۵° کے زاویے بناتی ہیں۔ اگر تختے پر ۱۰۰ پونڈ کا ایک وزن ہو تو بتاؤ کہ یہ وزن کہاں رکھا جانا چاہیئے۔

(۱۷) چار مساوی یکساں سلاخیں ہر ایک وزنی و، اِس طرح جوڑی جاتی ہیں کہ ایک مربع ا ب س د بن جاتا ہے۔ ا پر بندھے ایک

ڈورے سے یہ ترتیب آویزاں کی جاتی ہے۔ اور کنارے ب اور د ایک ہلکی سلاخ کے ذریعہ سے ملا دیے جاتے ہیں تاکہ مربع اپنی شکل قائم رکھے۔ دکھاؤ کہ سلاخ ب د کی سمت میں دباؤ ۲ و ہے۔ اور ہ والے قبضے کا ردِّ عمل دریافت کرو۔

(۱۸) عبارت "ایک نقطہ کے گرد ایک قوت کا معیارِ اثر" کی تعریف کرو۔ اپنی تعریف سے یہ دکھاؤ کہ مخالف سمتوں میں عمل کرنے والی دو مساوی اور متوازی قوتوں کے اثری معیاروں کا مجموعہ اُس مستوی کے ہر نقطے کے گرد، جس میں وہ عامل ہیں، ایک ہی ہوتا ہے۔ [جامعۂ لندن]

(۱۹) ایک زینہ دار سیڑھی کا ہر نصف حصہ $\frac{1}{2}$۵ فٹ لمبا ہے اور دونوں حصے ۲۸ انچ لمبے ایک ڈورے کے ذریعہ سے ملے ہوئے ہیں جو ان کے آزاد سروں سے ۱۶ انچ کے فاصلے سے دو نقطوں پر بندھا ہے۔ زینہ والے نصف کا وزن ۱۶ پونڈ ہے اور دوسرے نصف کا وزن ۴ پونڈ ہے۔ جب ۱۱ اسٹون وزن کا ایک آدمی چوٹی سے $\frac{1}{2}$۱ فٹ کے فاصلے سے کھڑا ہو تو بتاؤ کہ ڈورے کا تناؤ کیا ہوگا۔ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ ڈورا پورے طور سے کھنچا ہوا ہے اور یہ کہ سیڑھی اور زمین کے درمیان ردِّ عمل انتصابی ہیں۔ [جامعۂ لندن]

(۲۰) و وزن اور ۲ ط طول کی ایک سلاخ ا ب ایک انتصابی دیوار سے ا پر ایک چکنے قبضے کے ذریعہ سے، اور ا سے انتصاباً اوپر اس دیوار کے ایک نقطہ س سے، لگی ہوئی ہے اس طرح کہ ا س = ا ب، اور ب، ۲ ل کے طول کے ایک ان کھنچ ڈورے سے ملا ہوا ہے۔ تو ان مقداروں کی رقموں میں ڈورے کا تناؤ اور قبضے کا عمل معلوم کرو۔

اگر سلاخ ۶ فٹ لمبی اور ۱۰ پونڈ وزنی ہو اور ڈورا ۲ فٹ لمبا ہو تو ثابت کرو کہ اس کا تناؤ $\frac{2}{3}$۱ پونڈ وزن ہے۔ اگر ا پر جوڑ کسی قدر سخت ہو جس سے علاوہ سنبھالنے والی قوت کے وہ ایک جُفت ج بھی پیدا کرے جس سے ڈورے کا تناؤ گھٹ کر ا پونڈ وزن رہ جائے تو ثابت کرو کہ ج

تقریباً ۳٫۹۴ پونڈ فٹ اکائیاں ہوگا۔

[جامعۂ لندن]

(۲۱) اب س اور اس د دو مثلث ہیں جن میں اب = اس = اد اور زاویے ب اس اور س اد علی الترتیب ۹۰° اور ۳۰° کے ہیں۔ اگر اد انتصابی ہو تو یہ شکل پانچ ہلکی سلاخوں کے ایک دیوارگیر کی ہو جاتی ہے۔ دیوارگیر ا پر ثابت ہے۔ اور د پر ایک کھونٹی کے ذریعہ سے دیوار سے ٹھیک علیحدہ ہے اور ب سے ۵ پونڈ کی ایک کمیت آویزاں ہے۔ تو ترجیحاً تحلیلی قاعدوں سے دریافت کرو کہ د پر والی کھونٹی پر کیا دباؤ ہے اور سلاخ د س، س ا، اور اب پر کیا قوتیں عامل ہیں۔ یہ بھی بتاؤ کہ قوتیں بھچکاؤ کی ہیں یا تناؤ کی۔

[جامعۂ لندن]

(۲۲) دو سیڑھیاں اب اور اس، ہر ایک ۲ ط طول کی، ا پر ایک قبضے سے وصل ہیں اور ایک چکنے اُفقی مستوی پر استادہ ہیں۔ اِن کو پھسلنے سے روکنے کے لئے اِن کے وسطی نقطوں میں ل طول کی ایک رسی بندھی ہوئی ہے۔ اگر سیڑھیوں کے وزن ۴۰ اور ۱۰ پونڈ ہوں تو رسی کا تناو معلوم کرو اور قبضے پر عمل کے اُفقی اور انتصابی اجزاء دریافت کرو۔

[جامعۂ لندن]

(۲۳) ایک سلاخ اب سرے ا کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہے اور ب پر ملاست کے ساتھ ایک دُوسری سلاخ ب س سے وصل ہے۔ جس کا دُوسرا سرا س ایک ایسی چکنی نالی میں رہنے پر مجبور ہے جو ا میں سے گزرتی ہے۔ س ا کی سمت میں ب س پر ایک قوت ق عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ اب پر پیدا شدہ جُفت ق × اک ہے، جہاں ک وہ نقطہ ہے جس پر، ب س کو بڑھائیں تو وہ اس کے نقطہ ا پر کے عمود کو قطع کرے۔

[جامعۂ لندن]

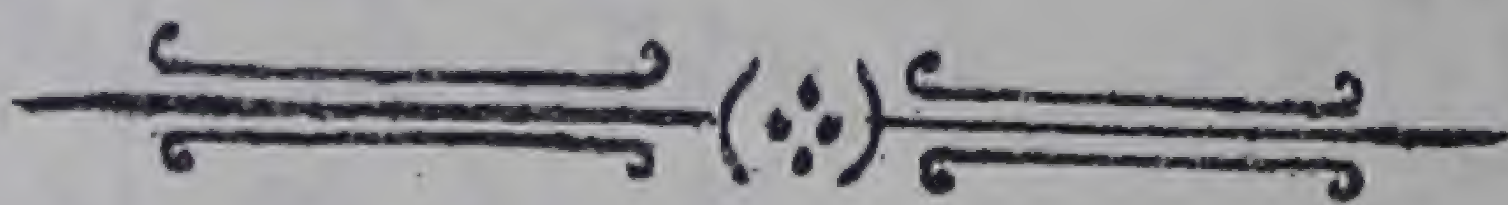
(۲۴) ایک جُفت کی تعریف کرو۔ جُفتوں کا امتیازی خاصہ کیا ہے؟ ثابت کرو کہ ایک ہی مستوی میں عمل کرنے والے ایک جُفت اور ایک قوت باہم ایک منفردہ قوت کے مُعادِل ہیں ایک مثلثی پرت کے

ضلعوں پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں اور جن ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اُن ہی کے متناسب بھی ہیں۔ تو حاصل کی قدر دریافت کرو [جامعۂ بمبئی]

(۲۵) چھ ہلکی مساوی سلاخیں اپنے کناروں پر اِس طرح جُڑی ہوئی ہیں کہ اُن سے ایک منتظم مسدس ا ب س د ی ف بن جاتا ہے۔ س اور ف کو ایک دُوسری ہلکی سلاخ ملاتی ہے۔ اِس ترتیب کو ا اور ب پر بندھے دو انتصابی ڈوروں سے آویزاں کرتے ہیں۔ تاکہ ا ب، س ف، اور د ی اُفقی رہیں۔ د اور ی سے ۲۰ پونڈ کے مساوی وزن لٹکائے جاتے ہیں۔ تو ہر سلاخ پر کی قوتیں دریافت کرو اور بتلاؤ کہ وہ کھینچ ہیں یا دھکیل۔

(۲۶) ثابت کرو کہ دو غیر متوازی ہم مستوی قوتوں کا معیارِ اثر مستوی کے کسی نقطے کے گرد اُن کے حاصل کے معیارِ اثر کے مساوی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر ایک مستوی کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر ترتیب وار قوتیں عمل کریں اور ہر قوت مقدار اور سمت میں اُس ضلع سے تعبیر ہو جس پر وہ عمل کرتی ہے تو وہ قوتیں ایک گردشی معیارِ اثر کے مُعادِل ہیں۔ جو کثیر الاضلاع کے دُگنے رقبہ سے تعبیر ہوتا ہے۔

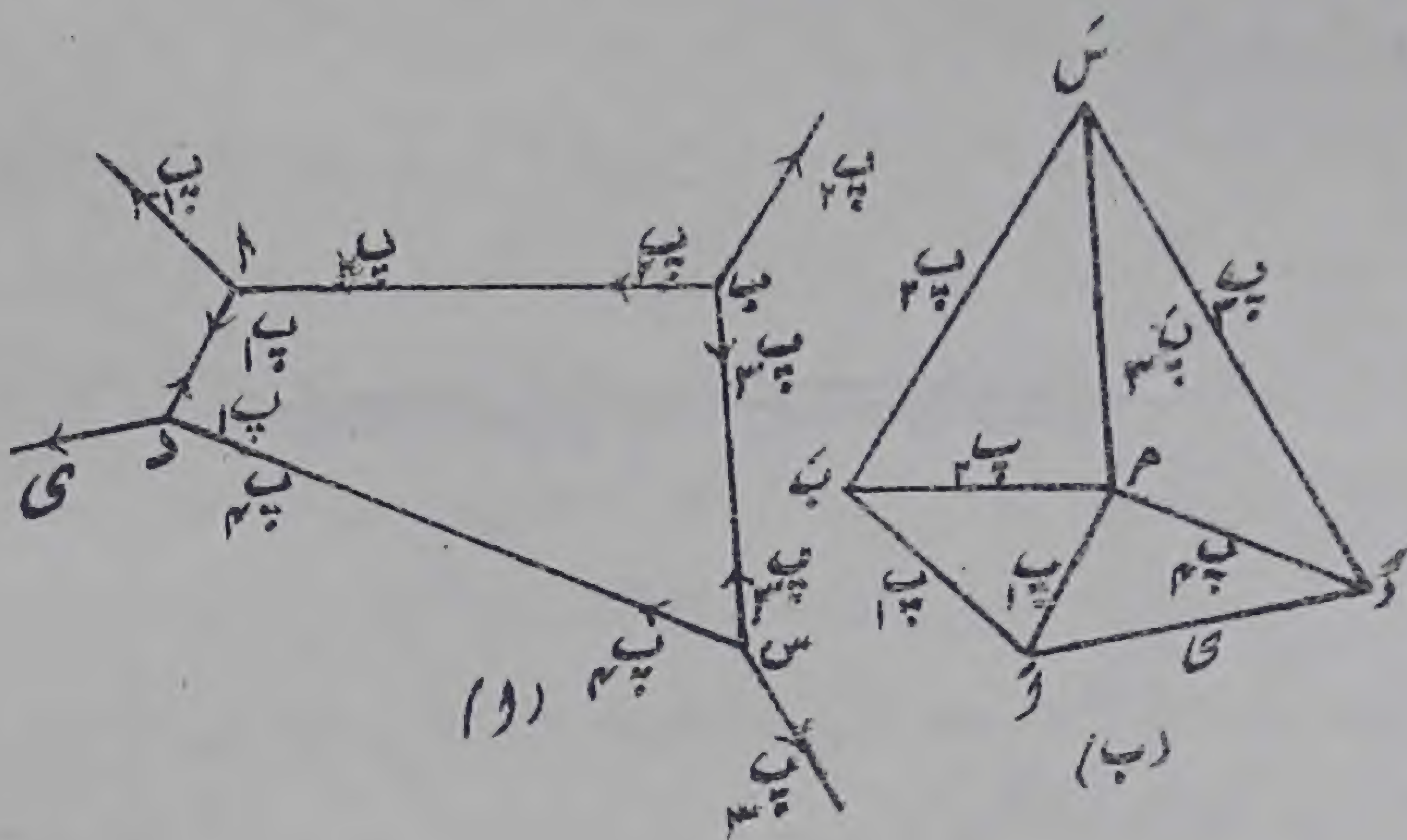
[جامعۂ مدراس]



گیارہویں فصل

یک مستوی قوتوں کے مسئلوں کے حل کے ترسیمی طریقے

ربطی کثیر الاضلاع :- یک مستوی قوتوں کے ایک نظام کا موازن دریافت کرنے کے لئے ذیل کا ترسیمی طریقہ بہ غایت کار آمد ہے۔ شکل ۱۶۲ (ا) میں پ۱، پ۲، اور پ۳ تین قوتیں ہیں جو کاغذ کے مستوی میں عمل کرتی ہیں اور ایک نقطہ پر نہیں ملتیں۔



شکل ۱۶۲ - ربطی کثیر الاضلاع کے ذریعہ سے ترسیمی حل

اُن کا موازن دریافت کرنا مقصود ہے۔

پ۱ کو اِس طرح ترازو کر سکتے ہیں کہ اِس کے خطِ عمل کے کسی نقطے ا۱ پر دو قوتیں پَ۱ اور پَ۲ لگائیں جو کاغذ کے مستوی میں ہوں اور ایک ہی خطِ مستقیم میں نہ ہوں۔ پ۱ پَ۱ اور پَ۲ کو قوتوں کے مثلث کی شرائط پوری کرنا چاہیئے۔ چنانچہ شکل ۱۶۲ (ب) میں اَ ر ب سے پ۱ کی تعبیر ہوتی ہے اور ب ھر اور ھر اَ علی الترتیب پَ۲ اور پَ۱ کو تعبیر کرتے ہیں۔ پَ۱ اور پَ۲ کو قابلِ عمل بنانے کا کوئی ذریعہ ہونا چاہیئے۔ سہولت اِس میں ہے کہ سلاخیں یا روابط استعمال کئے جائیں جن میں سے ایک ربط ا ب کے ذریعہ سے ا۱ پر پَ۲ لگایا جاتا ہے اور وہی ربط پ۲ کے خطِ عمل پر ب تک بڑھا دیا جاتا ہے۔ جہاں اِس سے ایک مساوی اور مخالف قوت پَ۲ عمل میں آتی ہے۔ ربط ا ب کا اس طرح توازن ہو جاتا ہے۔

پھر ب پر ایک تیسری قوت پَ۳ لگا کر پ۲ کو ترازو کر سکتے ہیں۔ پَ۲ پ۲ اور پَ۳ قوتوں کے مثلث ب سَ ھر [شکل ۱۶۲ (ب)] کے ضلعوں ب سَ، سَ ھر، اور ھر ب سے علی الترتیب تعبیر ہوتے ہیں۔ پَ۳ کے خطِ عمل کو بڑھاؤ کہ وہ پ۳ کو س پر قطع کرے۔ اور فرض کرو کہ ب س ایک ربط ہے جس کا توازن ب اور س پر عاملہ قوتوں پَ۳ پَ۳ سے ہو جاتا ہے۔ اِسی طرح پ۳ کو س پر ایک قوت پَ۴ لگا کر ترازو کر لو۔ س پر عاملہ پ۳، پَ۴ اور پَ۳ کے لئے قوتوں کا مثلث شکل ۱۶۲ (ب) میں سَ دَ ھر ہوگا۔ پَ۴ اور پَ۱ کے خطوط کو بڑھاؤ کہ وہ د پر قطع کریں۔ اور فرض کرو کہ ربط س د اور ا د کا توازن د پر قوتوں پَ۴ اور پَ۱ کے عمل کرنے سے ہو جاتا ہے۔ یہ اُسی وقت ممکن ہے جب کہ ایک تیسری قوت ی نقطہ د پر عمل کرے۔ د پر عمل کرنے والی تین قوتیں شکل ۱۶۲ (ب) میں قوتوں کے مثلث دَ اَ ھر سے تعبیر ہیں۔

پ۱، پَ۲، پ۲ اور ی میں سے ہر قوت اب ربطوں کی

قوتوں سے ترازو ہو جاتی ہے یعنی قوتیں پ۱، پ۲، پ۳ اور ی ربطوں کی قوتوں سے مل کر ایک متوازن نظام بناتی ہیں۔ مزید برآں ہر ربط علیحدہ علیحدہ ترازو ہو جاتا ہے۔ پس ہم ربطی نظام کو نظرانداز کر سکتے ہیں اور یہ کہہ سکتے ہیں کہ قوتیں پ۱، پ۲، پ۳ اور ی توازن میں ہیں اور ی قوتوں پ۱، پ۲ اور پ۳ کا موازن ہے۔

شکل ۱۶۲ (ا) اور (ب) کے دیکھنے سے شرائطِ توازن کی حسبِ ذیل صورت معلوم ہوتی ہے :- یک مستوی قوتوں کا نظام توازن میں ہوگا بشرطیکہ

(۱) قوتوں کا ایک بند کثیر الاضلاع اَ بَ سَ دَ [شکل ۱۶۲ (ب)] کھینچا جا سکے جس کے ضلعے ترتیب وار دی ہوئی قوتوں کو تعبیر کریں۔

(۲) ایک بند ربطی کثیر الاضلاع ا ب س د کھینچا جا سکے جس کے ضلعے فرداً فرداً اُن خطوں کے متوازی ہوں جو ایک مشترک نقطہ ھر سے قوتی کثیر الاضلاع کے گوشوں تک کھینچے جائیں [شکل ۱۶۲ (ب)]۔

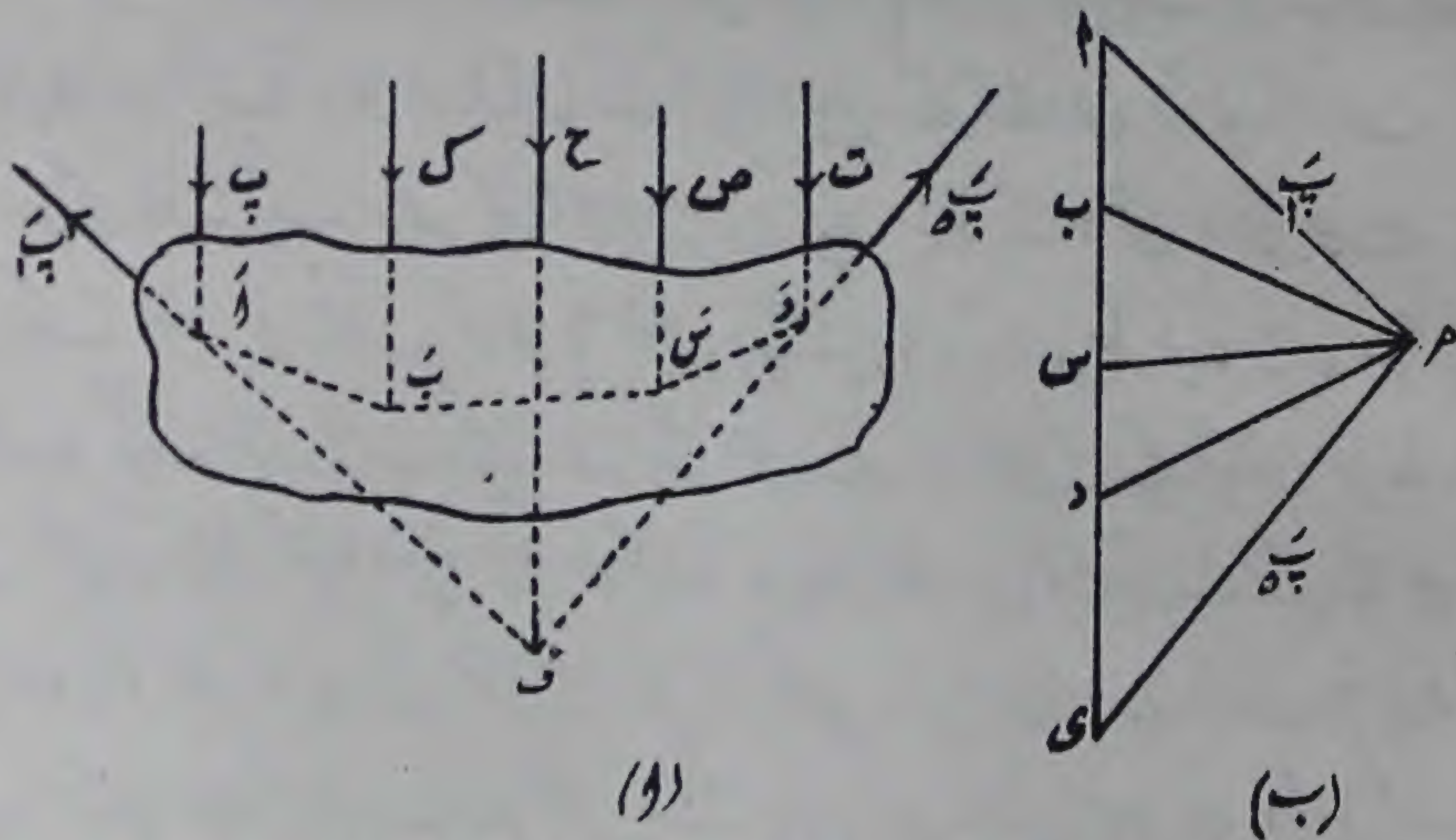
واضح رہے کہ شکل ۱۶۲ (ب) میں نقطہ یا قطب ھر کی وضع اُن سمتوں پر منحصر ہے جو دو قوتوں پ۱ اور پ۲ کے لئے قرار دی جائیں۔ چونکہ اس قرارداد کے لئے انتخاب کا کامل اختیار تھا اس لئے معلوم ہوا کہ ھر ہر وضع اختیار کر سکتا ہے۔ علاوہ ازیں یہ بھی واضح ہوگا کہ کوئی ربط مثل ب س کے [شکل ۱۶۲ (ا)] جو قوتوں پ۲ اور پ۳ کو ملائے، وہ ھر سَ کے متوازی [شکل ۱۶۲ (ب)] کھینچی جاتی ہے۔ اور یہ کہ ھر سَ خطوط بَ سَ اور سَ دَ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور یہ خطوط بھی اُن ہی قوتوں پ۲ اور پ۳ کو تعبیر کرتے ہیں۔

اگر تمام دی ہوئی قوتیں ایک نقطہ پر ملیں تو ربطی کثیر الاضلاع گھٹ کر ایک نقطہ رہ جائیگا جو قوتوں کے تقاطع پر واقع ہوگا۔ اِس صورت میں حل کے لئے صِرف قوتوں کا کثیر الاضلاع کفایت کریگا۔

متعدد متوازی قوتوں کا حاصل :- ترسیمی حل :-

شکل ۱۶۳ (ا) میں پ، ک، ص اور ت دی ہوئی متوازی قوتیں ہیں جو ایک جسم پر عمل کرتی ہیں اور اُن کا حاصل دریافت طلب ہے۔

پہلے قوتوں کا کثیرالاضلاع ا ب س د ی ا [شکل ۱۶۳ ب] کھینچو جو بہ صورت موجودہ ایک خطِ مستقیم ہے کیونکہ تمام قوتیں متوازی ہیں۔ پ، ک، ص اور ت علی الترتیب ا ب، ب س، س د اور د ی سے تعبیر ہوتے ہیں۔ کثیرالاضلاع کو بند کرنے والا خط ی ا ہے جو اس بناء پر موازن کو تعبیر کرتا ہے۔ یہاں دی ہوئی قوتوں کا حاصل ح کی تعبیر ا ی ہے یعنی موازن مقلوب۔ کوئی قطب م منتخب کرلو اور م ا، م ب، وغیرہ کو ملاؤ۔ شکل ۱۶۳ (ب) میں م ب، م س، اور م د کے متوازی علی الترتیب ربط اَبَ، بَ سَ، سَ دَ [شکل ۱۶۳ (ا)] کھینچو۔ پ۱ اور پ۵ [شکل ۱۶۳ (ا)] علی الترتیب م ا اور م ی کے متوازی کھینچو۔ مثلث ا ی م میں ا ی حاصل ح کو



شکل ۱۶۳۔ متوازی قوتوں کے ایک نظام کا حاصل

تعبیر کرتا ہے۔ اس لئے ی م اور م ا ایسی قوتوں کا ایک جوڑا ہے

جن کا توازن جسم پر ح کے عمل کرنے سے ہو جائیگا۔ پس شکل ۱۶۳
(ا) میں اگر پ ا اور پ بڑھائے جائیں تو ح کے خط عمل کے ایک
نقطہ پر قطع کریں گے ۔ یہ نقطہ ف ہے اور ح اِس نقطہ ف سے دی
ہوئی قوتوں کے متوازی خط پر عمل کرتا ہے۔

عملاً یہ رواج ہے کہ ربطی کثیر الاضلاع استعمال کرتے وقت بو[1]،
کا ارقام استعمال کیا جائے ۔ ذیل کی مثالوں کے مطالعہ سے طریقے
بخوبی سمجھ میں آجائینگے ۔

مثال ۱ :۔ ۳، ۴ اور ۲ ٹن وزن کی قوتیں دی ہوئی ہیں۔ اُن کا
موازن دریافت کرو [شکل ۱۶۴]

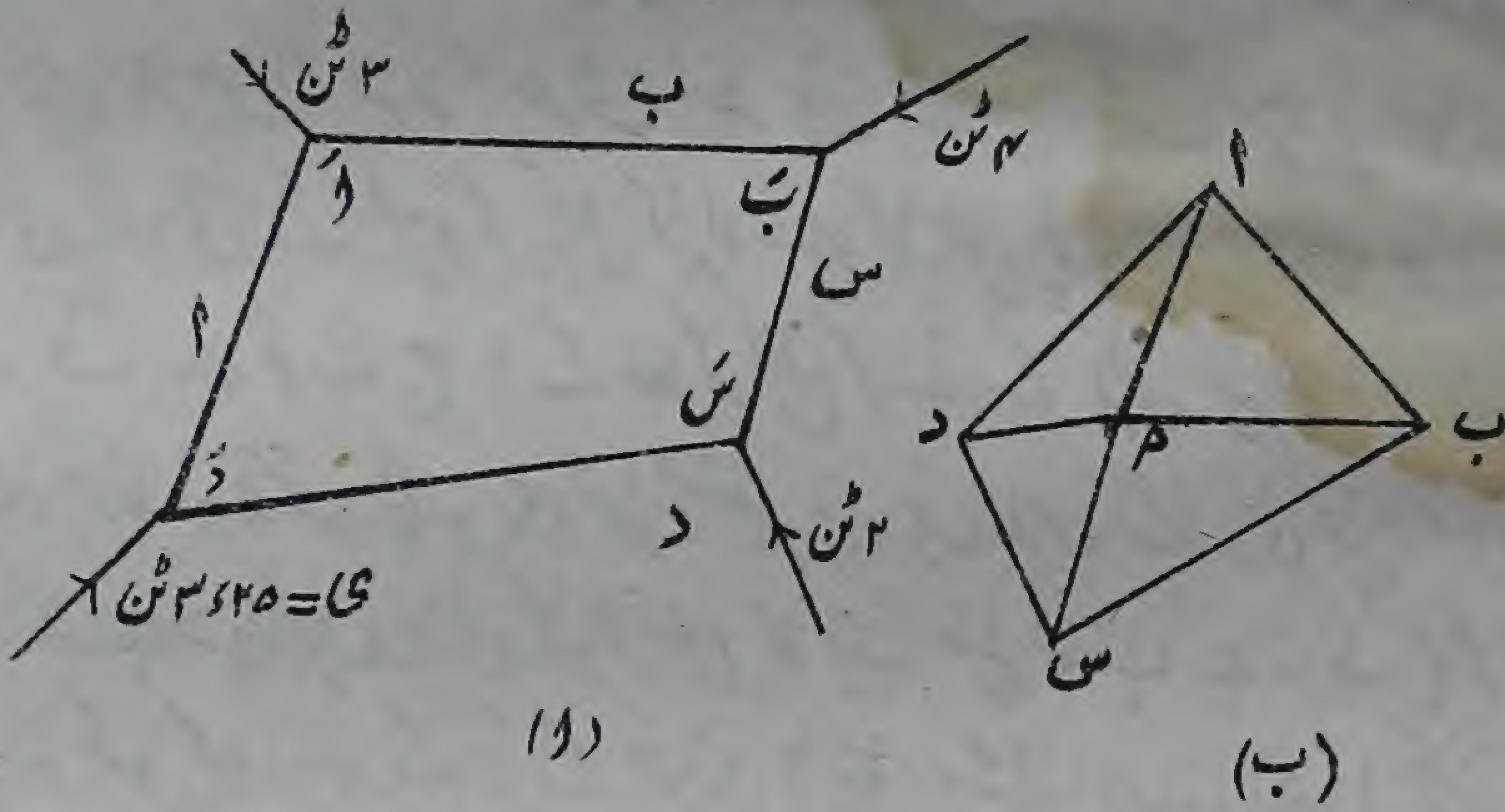
جن اصولوں پر اِس کا حل منحصر ہے وہ یہ ہیں :۔

(ا) قوتی کثیر الاضلاع بند ہو جانا چاہیئے۔ (ب)
ربطی کثیر الاضلاع بند ہونا چاہیئے ۔ جگہیں ا، ب اور س نامزد
کر دو اور د کو عارضی طور سے ۲ ٹن کی قوت کے قریب رکھو۔ قوتی کثیر الاضلاع
اب س د [شکل ۱۶۴ (ب)] کھینچو۔ تو بند کرنے والا خط د ا موازن ی،
کی سمت، جہت اور مقدار کو بتلاتا ہے۔ ی کی صحیح وضع دریافت کرنے کے لئے
کوئی قطب م منتخب کرلو اور قوتوں کے کثیر الاضلاع کے کناروں ا، ب، س اور
د سے م کو ملاؤ۔ ایک ربطی کثیر الاضلاع اِس طرح بناؤ کہ ۳ ٹن والی قوت کے
خط پر ایک نقطہ رَ منتخب کرلو [شکل ۱۶۴ (ا)] اور جگہ ب میں م ب
کے متوازی ایک خط رَ بَ کھینچو اور جگہ س میں م س کے متوازی ایک خط
بَ سَ کھینچو۔ ربطی کثیر الاضلاع کے بند کرنے والے خطوط دریافت کرنے کے لئے م ا
کے متوازی رَ دَ اور م د کے متوازی سَ دَ کھینچو۔ یہ خطوط دَ پر متقاطع ہیں۔ موازن
ی اب دَ میں سے گزرتا ہے اور شکل ۱۶۴ (ا) میں کامل طور سے دکھایا گیا ہے۔
اگر دی ہوئی قوتوں کا حاصل مطلوب ہو تو بھی اِس طریقے سے موازن دریافت

---

[1] Bow

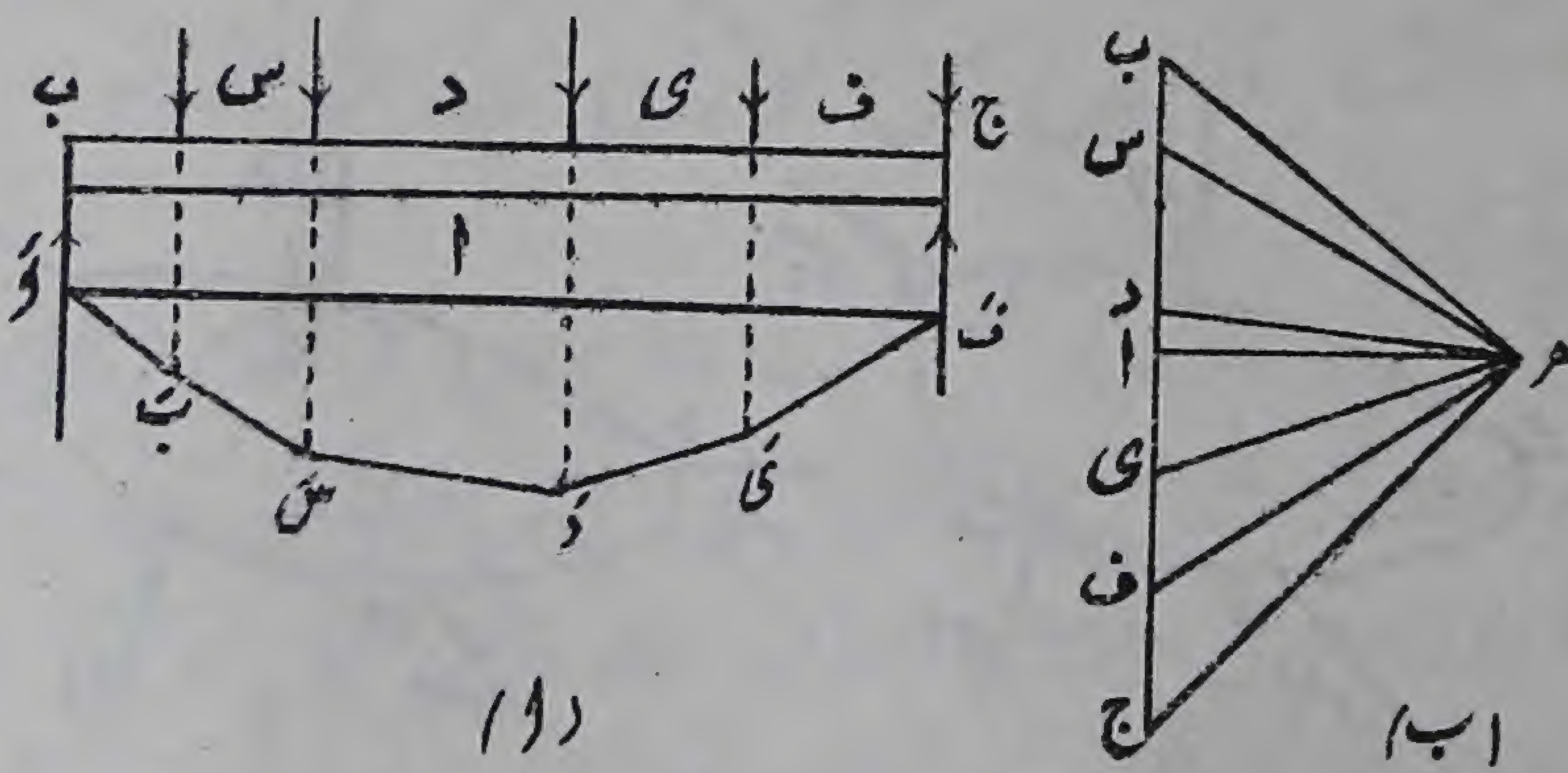
کر لو اور پھر حاصل معلوم کرنے کے لئے موازن کی جہت منقلب کر دو۔



شکل نمبر ۱۶۴ ۔ ربطی کثیر الاضلاع کا استعمال

مثال نمبر ۲ :- حسب شکل نمبر ۱۶۵ (ا) ایک بوجھ دار کڑی دی ہوئی ہے۔ سہاروں کے ردِّ عمل معلوم کرو۔ دونوں ردِّ عمل انتصابی ہیں۔

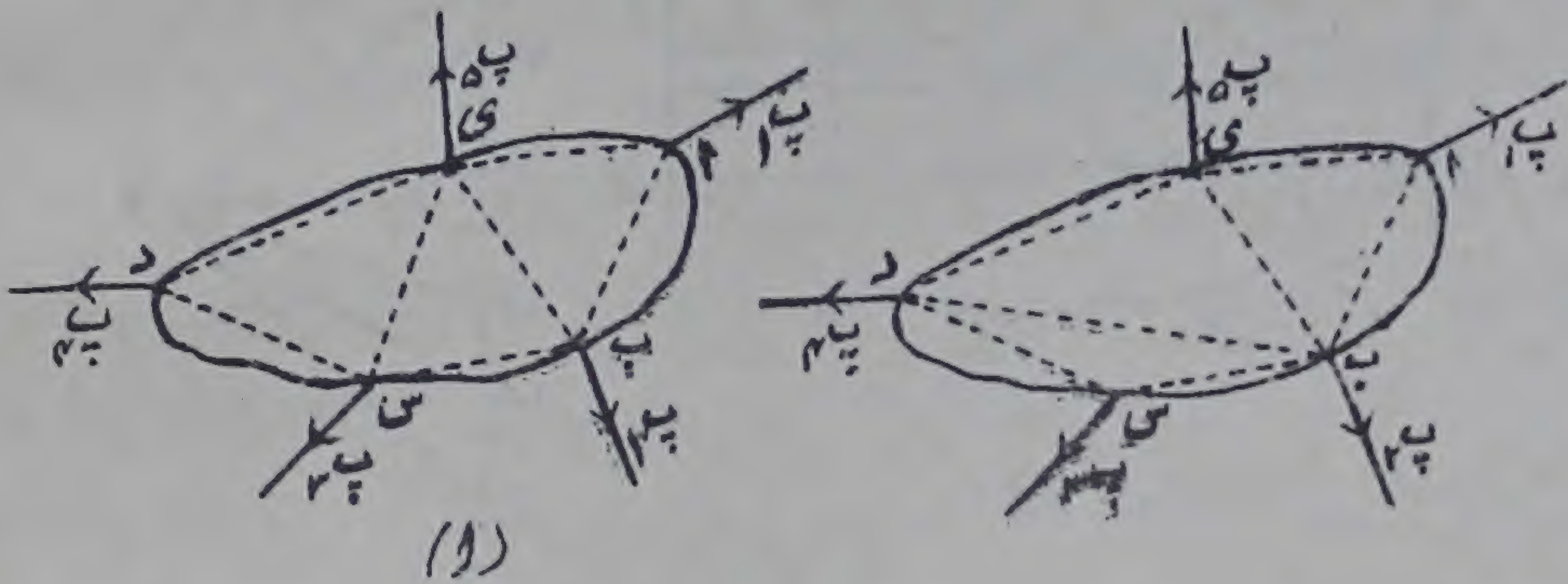
اِس صورت میں چونکہ کڑی پر عمل کرنے والی قوتیں سب متوازی ہیں اِس لئے قوتی کثیر الاضلاع ایک خطِ مستقیم ہے۔ جگہ ب سے شروع کرو۔ اور دیئے ہوئے بوجھوں کو ظاہر کرنے کے لئے ب س، س د، د ی، ی ف اور ف ج



شکل نمبر ۱۶۵ ایک کڑی کے ردِّ عمل ربطی کثیر الاضلاع کے طریقہ سے

[شکل ۱۶۵ (ب)] کھینچو۔ کوئی قطب م منتخب کر لو اور ب، س، د، ی، ف اور ج کو م سے ملاؤ۔ بائیں جانب والے ردِّ عمل کے خط پر ایک نقطہ اُ منتخب کرو اور جگہ ب میں م ب کے متوازی ایک خط اُ بَ کھینچو۔ جگہوں س، د، ی اور ف میں م س، م د، م ی، م ف کے علی الترتیب متوازی خطوط بَ سَ، سَ دَ، دَ یَ اور یَ فَ کھینچ کر ربطی کثیر الاضلاع کا عمل پورا کرو۔ قوت ف ج کے ایک نقطہ فَ سے قوت ج ا کے خط کو قطع کرنے کے ربطی کثیر الاضلاع کا ایک ضلع کھینچنا ہے۔ چونکہ یہ قوتیں ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں اس لئے ربطی کثیر الاضلاع کا ضلع صفر طول کا ہے۔ بنابریں ربطی کثیر الاضلاع کا ایک ضلع غائب ہے۔ فَ اَ کو ملا کر کثیر الاضلاع کو مکمل کرو۔ اور فَ اَ کے متوازی [شکل ۱۶۵ (ب)] م ا کھینچو۔ تو اب ہر دو ردِّ عمل کی قدریں ا ب اور ج ا سے ظاہر ہو سکتی ہیں۔

اُستوار قالب:۔ شکل ۱۶۶ (ا) میں ایک پتلی تختی کا خاکا دکھایا گیا ہے جس کے نقاط ا، ب، س، وغیرہ پر علی الترتیب قوتیں پ۱، پ۲، پ۳، وغیرہ عمل کرتی ہیں۔ تمام قوتیں تختی کے مستوی میں ہیں اور توازن میں ہیں۔ واضح رہے کہ قوتوں کا توازن تختی کی شکل سے بے نیاز ہے۔ بس خاکے کے لئے ہر شکل منتخب کی جا سکتی ہے اور قوتیں توازن میں رہینگی بشرطیکہ دی ہوئی مقداروں، سمت کے خطوں اور قوتوں کی جہتوں میں



شکل ۱۶۶۔ ایک جسم کا ایک استوار قالب سے استبدال

کسی قسم کا تغیر نہ کیا جائے۔ ہم اِس سے بڑھ کے یہ کر سکتے ہیں کہ تختی کو دُور کر دیں اور اِس کی بجائے سلاخوں کی ایک ترتیب رکھیں [جو شکل ۱۶۶ (ا) میں نقطہ دار خطوط سے ظاہر ہیں] جو ا، ب، س، وغیرہ پر قبضوں یا سُوئیوں کی مدد سے وصل ہوں۔ نتیجہ وہی ہوگا یعنی کہ دی ہوئی قوتیں ترازو ہو جائینگی اور سلاخوں سے بنا قالب توازن میں ہوگا۔

سلاخوں کو ترتیب دیتے وقت اِس بات کا لحاظ رکھنا چاہیئے کہ کسی سلاخ کی کسی دُوسری سلاخ کی اضافت سے کوئی حرکت نہ ہونے پائے۔ شکل ۱۶۶ (ا) میں اضافی حرکت کی روک وتری سلاخوں ی ب اور ی س سے ہو جاتی ہے۔ ایک دوسری اختیاری ترتیب شکل ۱۶۶ (ب) میں دکھائی گئی ہے۔

اِن امور کا لحاظ کرتے ہوئے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ اگر ایک اُستوار قالب پر یک مستوی قوتوں کا ایک متوازن نظام عمل کرے تو توازن، قالب کی شکل یا اُس کے حِصّوں کی ترتیب سے مستغنی ہوتا ہے۔ ایک **اُستوار قالب** کی تعریف یوں کی جا سکتی ہے کہ وہ جُڑی ہوئی سلاخوں کی ایک ترتیب ہے جو اِس طرح بنائی گئی ہے کہ اِس کے حِصّوں میں اضافی حرکت نہیں ہونے پاتی۔

اُستوار قالبوں میں توازن کے شرائط:- دو امر غور طلب ہیں:-

(ا) قالب پر عمل کرنے والا قوتوں کا نظام (جس کو عموماً بیرونی قوتیں کہتے ہیں) توازن میں ہونا چاہیئے۔ اور اِس کو وہ شرائط پوری کرنی چاہئیں جو اِس سے پیشتر تحقیق ہو چکی ہیں۔ یعنی تحلیلی طریقے کی رُو سے توازن کی تینوں مساواتیں [صفحہ ۲۱۶] پُوری ہونی چاہییں۔ یا ترسیماً دیکھا جائے تو قوتی کثیر الاضلاع اور رِبطی کثیر الاضلاع دونوں کو بند ہونا چاہیئے۔

(ب) اگر قالب کے کسی جوڑ پر کوئی بیرونی قوت یا قوتیں عمل کریں اور ساتھ ہی اِس کے جوڑ پر ملنے والی سلاخوں پر بھی کھینچ یا ڈھکیل کی قوتیں عمل کریں تو اِن قوتوں کے زیرِ عمل جوڑ توازن میں ہوگا۔ چونکہ یہ تمام قوتیں جوڑ پر سے گزرتی ہیں تو جوڑ کے توازن کی شرط یہ ہے کہ جوڑ پر عاملہ قوتوں کا قوتی کثیر الاضلاع بند ہونا چاہیئے۔ متعلم کو اِس امر سے واضح ہوگا کہ اِس سے قالب کی کسی سلاخ پر عمل کرنے والی قوت کی مقدار اور قسم معلوم ہو سکتی ہے۔

یک مستوی ہم نقطہ قوتوں کے کسی نظام کے لئے یہ امر باسانی تصدیق ہو سکتا ہے کہ اگر دو سے زیادہ مجہول چیزیں ہوں تو قوتی کثیر الاضلاع کا بنانا ممکن نہیں ہے۔ یہ دونوں چیزیں یا تو دونوں مقداریں ہونگی، یا دونوں سمتیں، یا ایک مقدار اور ایک سمت۔ پس یہ ضروری ہے کہ جوڑ پر عمل کرنے والی قوتوں کا حل دریافت کرنے کی کوشش سے پہلے اِس جوڑ پر مجہول چیزوں کی تعداد معلوم کر لی جائے۔

مثال :- شکل نمبر ۱۶۷ (۱) میں ایک قالب دیا ہے جس کے جوڑوں پر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ کے نمبر پڑے ہوئے ہیں۔ اِن میں سے ہر جوڑ پر بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ۱، ۲ اور ۳ پر عمل کرنے والی قوتیں پورے طور سے دی ہوئی ہیں۔ تو ۴ اور ۵ پر عاملہ قوتوں کو دریافت کرو تا کہ قالب توازن میں رہے۔ نیز ہر سلاخ پر قوت معلوم کرو اور بتاؤ کہ وہ کھینچ ہے یا ڈھکیل۔

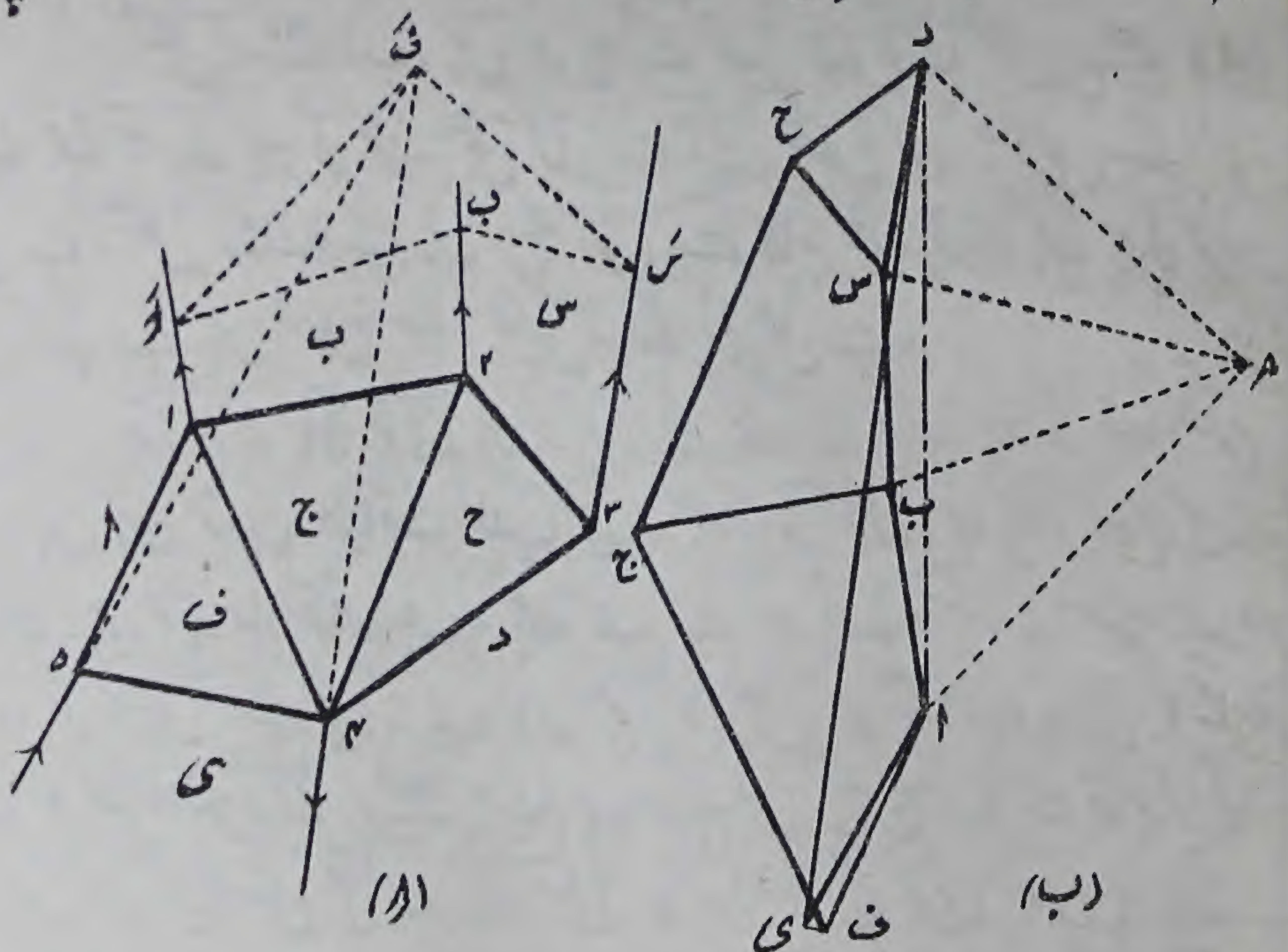
بَو[1] کے ارقام کو استعمال کرنے پر حروف ا، ب، س، د اور ی کے ذریعہ بیرونی قوتیں نامزد کی جا سکتی ہیں۔ حروف ف، ج، ح کے ذریعہ سے، جیسا کہ شکل نمبر ۱۶۷ (۱) میں دکھایا ہے قالب کی ہر سلاخ کی قوت کی نامزدگی ہو سکتی ہے۔ چنانچہ سلاخ ۱۲ پر قوت ب ج ہے یا ج ب۔

---

[1] Bow

اول سے آخر تک ساعت وار محوری گردش فرض کرکے بیرونی قوتوں کے لئے قوتی کثیر الاضلاع کا جس قدر حصہ بھی ہو سکے کھینچو۔ چنانچہ ا ب (شکل نمبر ۱۶۷ (ب)) جوڑ ۱ پر عمل کرنے والی بیرونی قوت کو ب س جوڑ ۲ والی قوت کو اور س د جوڑ ۳ والی قوت کو تعبیر کرتا ہے۔ فی الحال جوڑ ۴ اور ۵ پر عمل کرنے والی قوتیں نہیں دکھائی جا سکتیں لیکن چونکہ کثیر الاضلاع ا ب س د ا کے بند کرنے والے ضلع سے ظاہر شدہ قوت یعنی د ا [شکل نمبر ۱۶۷ (ب)] جوڑ ۱، ۲ اور ۳ پر عاملہ قوتوں کا تسویہ کردیگی اس لئے معلوم ہوا کہ د ا جوڑ ۴ اور ۵ پر عمل کرنے والی قوتوں کے حاصل کی تعبیر ہے۔ کیوں کہ یہ حاصل بھی جوڑ ۱، ۲ اور ۳ پر عاملہ قوتوں کا توازن کردیگا۔

کوئی موزوں قطب م منتخب کرلو (شکل نمبر ۱۶۷ (ب)) اور ا، ب، س، اور د سے م کو ملاؤ۔ شکل نمبر ۱۶۷ (ا) میں ربطی کثیر الاضلاع کو اس طرح کھینچنا شروع کرو کہ قوت ا ب کے خط پر ایک نقطہ اَ منتخب کرلو اور م ب اور م س کے متوازی شکل نمبر ۱۶۷ (ب) میں علی الترتیب اَ بَ اور بَ سَ کھینچو۔ اَ سے م ا کے متوازی اَ فَ کھینچو۔ اور سَ سے م د کے متوازی سَ فَ کھینچو۔



شکل نمبر ۱۶۷۔ ایک استوار قالب کا توازن

یہ خطوط ف پر قطع کرتے ہیں اور د ا سے تعبیر شدہ حاصل قوت کو ف میں سے گزرنا چاہیئے۔ یہ قوت ۴ اور ۵ پر عمل کرنے والی قوتوں کا حاصل ہے اور چونکہ حاصل اور اجزاء کو ایک ہی نقطہ پر ملنا چاہیئے اِس لئے ۴ اور ۵ پر عمل کرنے والی قوتوں کی سمت کے خطوط ف ۴ اور ف ۵ کو ملانے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

شکل ۱۶۷ (ب) کے قوتی کثیرالاضلاع کو اب خط ف ۴ کے متوازی د ی اور ف ۵ کے متوازی ا ی کھینچ کر بند کر سکتے ہیں۔ د ی اور ی ا علی الترتیب جوڑ ۴ اور ۵ پر عمل کرنے والی قوتوں کو بالکلیہ ظاہر کرتے ہیں۔

قالب کی سلاخوں کی قوتیں ہر سلاخ کو علیحدہ علیحدہ لینے سے معلوم کی جا سکتی ہیں۔ جوڑ ۳ کو لو۔ اِس پر تین قوتیں عمل کر رہی ہیں۔ اور قوتوں کا مثلث اِس طرح بنایا جاتا ہے کہ ایک ضلع تو س د ہو [شکل ۱۶۷ (ب)] اور سلاخ ۳۴ اور ۲۳ کے متوازی علی الترتیب د ح اور س ح کھینچے جائیں۔ قوت کی قسم دریافت کرنے کے لئے جوڑ ۳ کے گرد ساعت دار جاؤ۔ اور قوتوں کے مثلث سے ہر قوت کی جہت معلوم کرو۔

شکل ۱۶۷ (ب) میں د ح سے تعبیر شدہ قوت شکل ۱۶۷ (الف) والے جوڑ ۳ سے باہر کی طرف عمل کرتی ہے۔ پس سلاخ ۳۴ کھینچ کے زیرِ عمل ہے۔ شکل ۱۶۷ (ب) میں ح س سے ظاہر شدہ قوت جوڑ ۳ کی طرف عمل کرتی ہے، پس سلاخ ۲۳ ڈھکیل کے زیرِ عمل ہے۔

جوڑ ۴ پر پانچ قوتیں ہیں۔ اور اِن میں سے صرف دو کی قدر معلوم ہے۔ پس تین قدریں دریافت طلب ہیں۔ اور فی الحال اِس جوڑ کا حل نہیں ہو سکتا۔ جوڑ ۲ پر چار قوتیں ہیں۔ جن میں سے دو پُورے طور پر معلوم ہیں اور بقیہ دو کی سمتیں معلوم ہیں۔ پس اِس جوڑ کا حل ہو سکتا ہے۔ جوڑ ۲ کے لئے قوتوں کا کثیرالاضلاع شکل ۱۶۷ (ب) میں ب س ح ج ب سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اور اس کثیرالاضلاع کی مدد سے سلاخ ۱۲ اور ۲۴ کی قوتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔ مذکورۂ بالا طریقہ سے اِن قوتوں کو دریافت کریں کہ کھینچ ہیں یا ڈھکیل تو

معلوم ہوتا ہے کہ ۱۲ ڈھکیل کے زیرِ عمل ہے اور ۲۴ کھینچ کے۔
جوڑ ۱ کا حل اُسی طرح کا ہے جس طرح جوڑ ۲ کا۔ قوتوں کا کثیر الاضلاع ا ب ج ف ا ہے (شکل ۱۶۷ (ب))۔ دیکھنے پر معلوم ہوتا ہے کہ سلاخ ۱۴ کھینچ کے زیرِ عمل ہے اور سلاخ ۱۵ ڈھکیل کے۔
جوڑ ۵ کا حل قوتوں کے مثلث ا ف ی سے ہوتا ہے (شکل ۱۶۷ (ب))۔ ضلعے ی ا اور ا ف پہلے ہی کھینچے میں آچکے ہیں اور بند کرنے والا ضلع ف ی سلاخ ۵۴ کے متوازی ہونا چاہیئے۔ اِس امر سے تمام خاکے کھینچنے کی صحت کی جانچ ہو جاتی ہے۔ دیکھنے پر معلوم ہوتا ہے کہ سلاخ ۱۵ ڈھکیل کے زیرِ عمل ہے۔ اور سلاخ ۴۵ بھی ڈھکیل کے زیرِ عمل ہے۔
جوڑ ۴ کو خاص طور سے حل کرنے کی ضرورت نہیں رہی کیوں کہ یہ واضح ہو گیا ہوگا کہ اِس جوڑ پر عمل کرنے والی تمام قوتیں اُوپر کے حلوں میں معلوم کی جا چکی ہیں۔

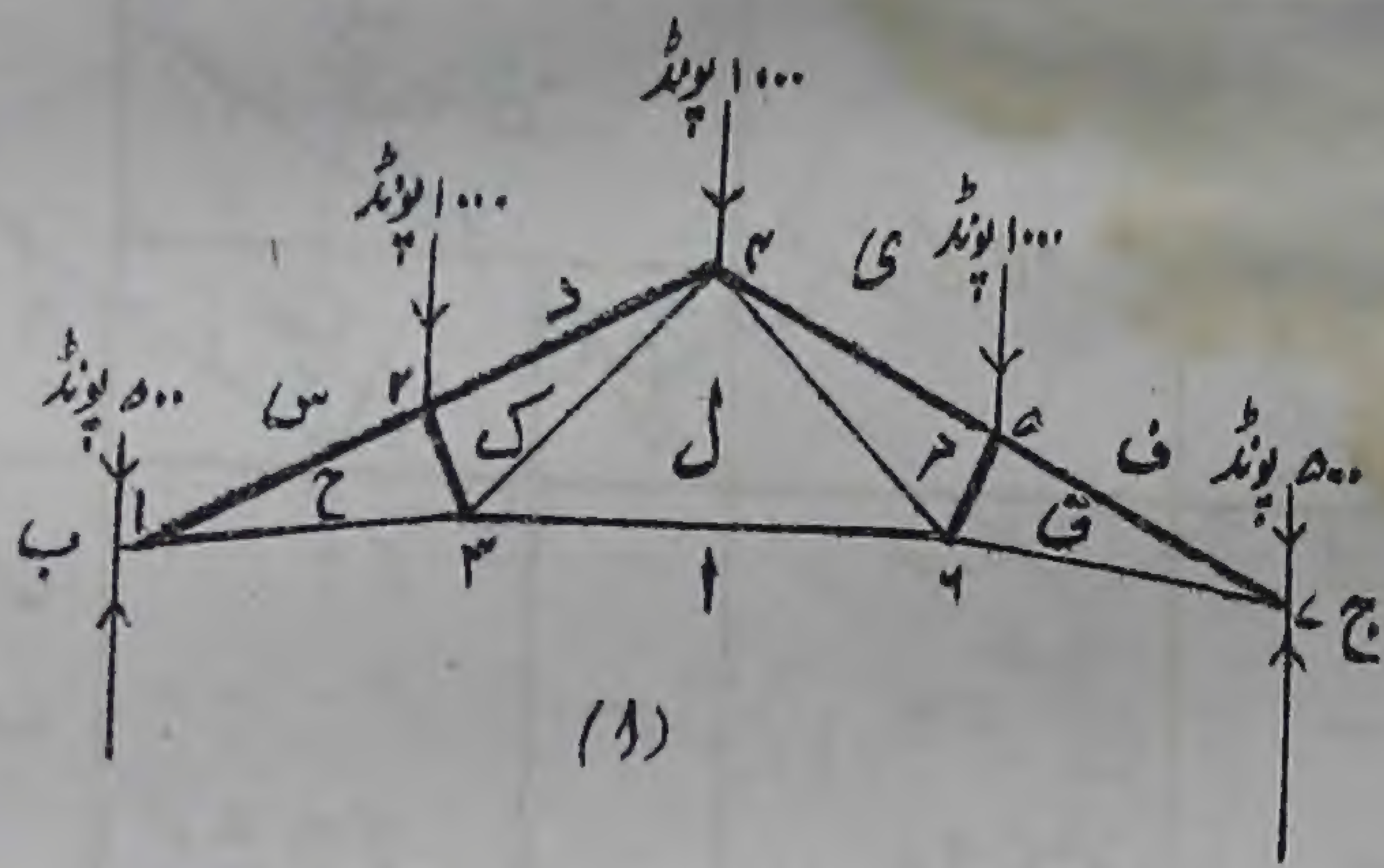
چھت کی قینچی:— شکل ۱۶۸ (ا) میں جو قالب دکھایا گیا ہے وہ چھتوں کے سنبھالنے کے لئے بہت موزوں ہے اور **چھت کی قینچی** کہلاتا ہے۔ جوڑ ۱، ۲، ۴، ۵ اور ۷ پر انتصابی بوجھ عمل پیرا ہیں — اور قینچی ۱ اور ۷ کے سہاروں پر قائم ہے۔ سہاروں کے ردِّ عمل انتصابی ہیں۔ اِس قالب پر جتنی بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں وہ سب انتصابی ہیں اور ردِّ عمل دسویں فصل میں دیے ہوئے حسابی طریقوں کو استعمال کرکے معلوم کئے جا سکتے ہیں یا جیسے صفحہ ۲۳۵ پر کڑی کے لئے ربطی کثیر الاضلاع استعمال کیا گیا ہے اُسی طریقہ پر دریافت ہو سکتے ہیں۔

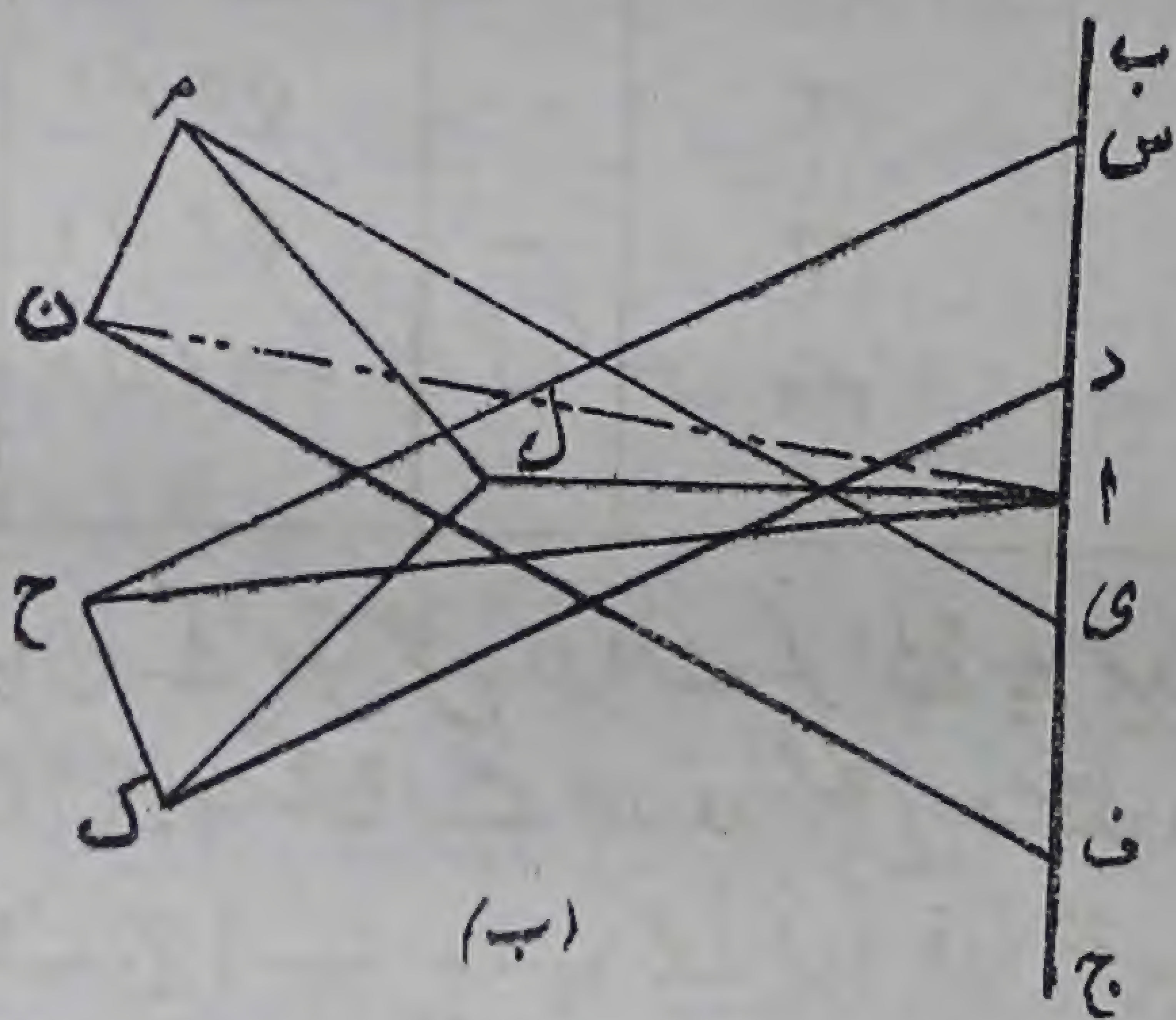
قوتوں کی جدول

حصہ کا نام	قوت پونڈ وزن میں: ڈھکیل	قوت پونڈ وزن میں: کھینچ	حصّہ کا نام	قوت پونڈ وزن میں: ڈھکیل	قوت پونڈ وزن میں: کھینچ
ا پر ردِّ عمل	۲۰۰۰	—	۱۳	—	۴۲۲۵
۷ پر ردِّ عمل	۲۰۰۰	—	۳۶	—	۲۴۸۰
۱۲	۴۶۷۵	—	۶۷	—	۴۲۲۵
۲۴	۴۲۵۰	—	۲۳	۹۰۰	—
۴۵	۴۲۵۰	—	۳۴	—	۱۹۶۰
۵۷	۴۶۷۵	—	۴۶	—	۱۹۶۰
			۵۶	۹۰۰۰	—

سہاروں کے ردِّ عمل دریافت کر لینے پر بیرونی قوتوں کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع مکمل کیا جا سکتا ہے اور وہ شکل نمبر ۱۶۸ (ب) میں ا ب س د ی ف ج ا ہے۔ اب جوڑ فرداً فرداً ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ میں حل کر لئے جاتے ہیں۔ شکل نمبر ۱۶۸ (ب) میں بند کرنے والا خط ا ن شکل نمبر ۱۶۸ (ا) کی سلاخ ۶۷ کے متوازی ہونا چاہیئے۔ یہ امر تمام کام کی صحت کی جانچ ہے۔ مختلف سلاخوں پر جو قوتیں ہیں وہ شکل نمبر ۱۶۸ (ب) سے معلوم کر لی جاتی ہیں۔ اور مذکورہ بالا جدول میں درج کر دی گئی ہیں۔

جو سلاخیں ڈھکیل کے زیرِ عمل ہیں وہ شکل نمبر ۱۶۸ (ا) میں موٹی لکیروں سے ظاہر کی گئی ہیں اور پتلی لکیریں کھینچ کے زیرِ عمل سلاخوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

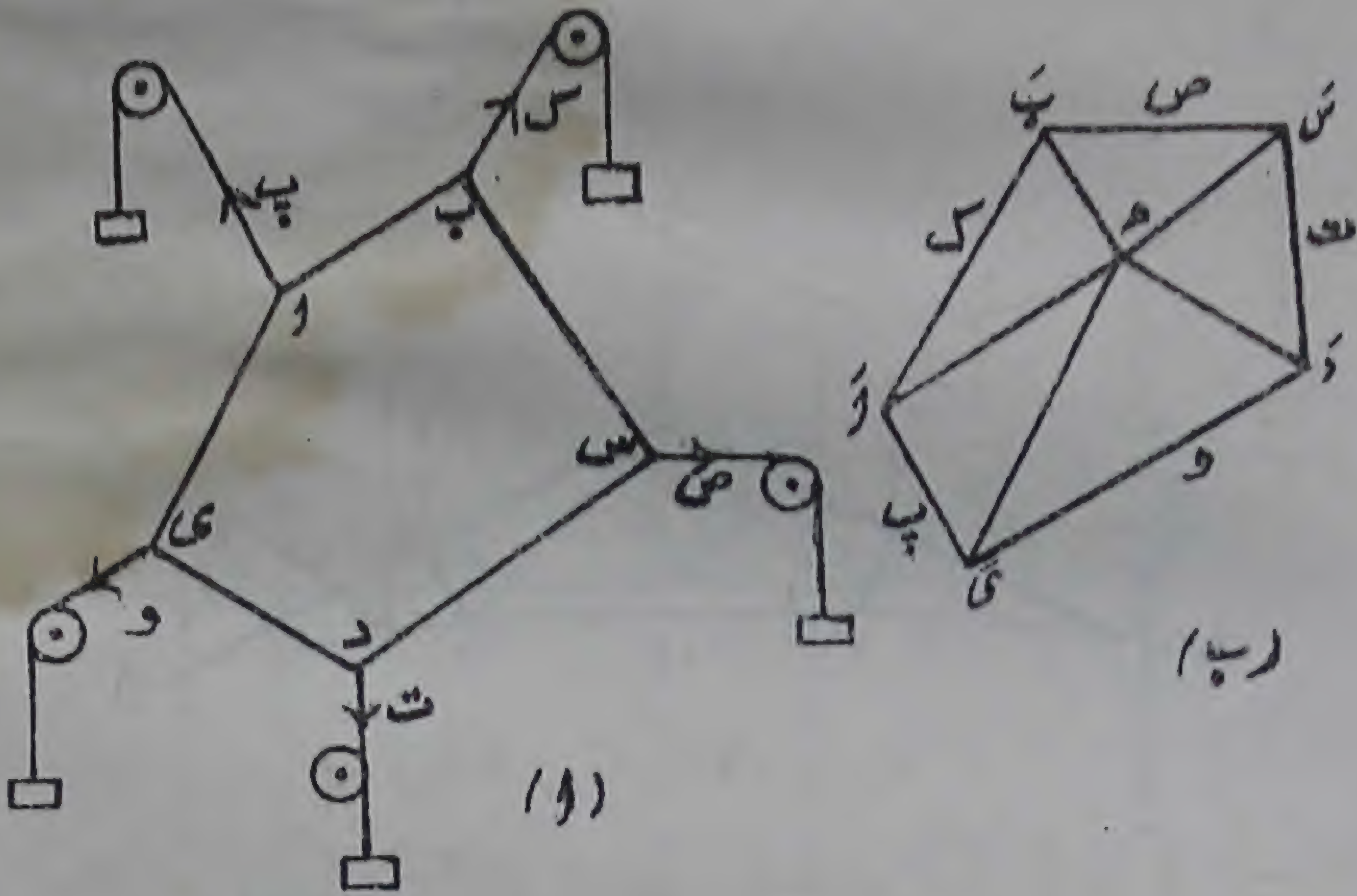




شکل ۱۶۸ ـ چھت کی قینچی کی ایک عام شکل میں قوتیں

تجربہ ۲۴ :ـ **ربطی کثیر الاضلاع** :ـ شکل ۱۶۹ (ا) میں ایک کثیر الاضلاع ا ب س د ی ا دکھایا گیا ہے جو ہلکے ہلکے ڈوروں سے بنا ہے اور جس پر حسب شکل قوتیں پ، ک، ص، ت اور و عمل کرتی ہیں۔ اِس ترتیب کو سکون میں آنے دو۔ پیمانے سے کھینچ کر دکھاؤ۔

(ا) کہ قوتی کثیر الاضلاع اَ بَ سَ دَ یَ اَ بند ہو جاتا ہے

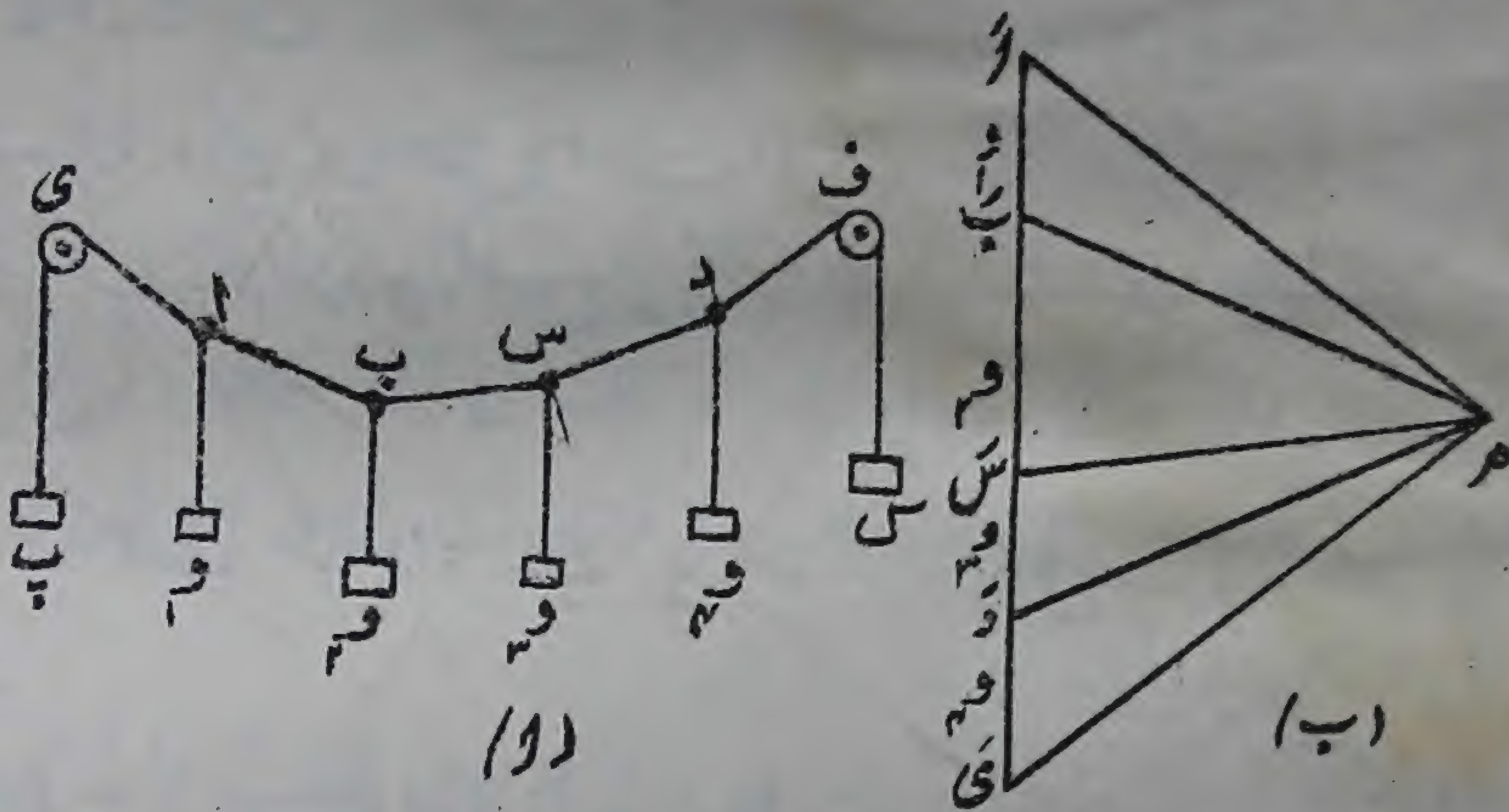


شکل ۱۶۹ - ایک تجرباتی ربطی کثیر الاضلاع

[شکل ۱۶۹ (ب)] اِس کے ضلعے ک، ص، ت، و اور پ کے علی الترتیب متوازی اور متناسب ہیں۔

(ب) کہ اَ، بَ، سَ، دَ اور یَ سے اب، بس، س د، د ی اور ی ا کے علی الترتیب متوازی کھینچے ہوئے خطوط ایک مشترک قطب ھ میں متقاطع ہوتے ہیں۔

تجربہ ۲۵ :- **بوجھ دار ڈورا**:- ایک ہلکے ڈورے میں ا، ب، س اور د پر چھوٹے چھلّے ہیں اور وہ ایک دیواری تختے میں نصب شدہ دو چرخیوں ی اور ف میں سے گزرتا ہے (شکل ۱۷۰ (ا)) چھلّوں سے بوجھ و، و۱، و۲ اور و۳ لٹکے ہوئے ہیں۔ اور ڈورے کے کناروں پر بوجھ پ اور ک ہیں۔ و، و۱، و۲ اور و۳ کی کوئی سی قیمتیں مقرر کر لو اور پھر اُن کے لئے قوتی کثیر الاضلاع کھینچو جیسا کہ اَ بَ سَ دَ یَ پر دکھایا گیا ہے۔ کوئی مناسب قطب ھ منتخب کر لو اور اَ، بَ، سَ، دَ اور یَ کو ھ سے ملاؤ۔ ھ اَ اور ھ یَ سے علی الترتیب پ اور ک کی قیمتیں معلوم ہونگی۔ ا پر کے چھلّے کو تختے پر ایک کیل یا سوئی سے نصب کر دو۔ ی پر کی چرخی کو نصب کر دو تاکہ ڈورے



شکل ۱۷۰ - ایک آویزاں ڈورا

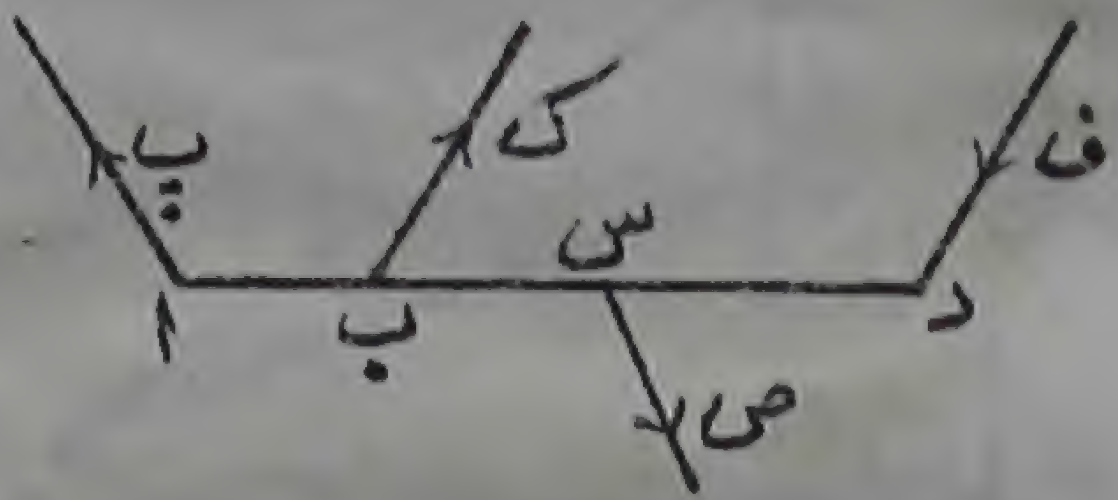
ا ی کی سمت م ا کے متوازی رہے - ب پر کے چھلّے کو ایک سوئی سے ثابت کر دو تاکہ ڈورے ا ب کی سمت م ب کے متوازی رہے - دوسرے چھلّوں س اور د اور ف والی چرخی کو بھی نصب کر دو - تاکہ ب س، س د اور د ف کی سمتیں علی الترتیب سَ م، دَ م اور یَ م کے متوازی رہیں - اب منتخب شدہ وزن و، و، و اور و لگاؤ اور نیز وزن پ اور ک بھی لگاؤ جن کی مقداریں م اَ اور م یَ ہیں - اب کیلوں کو دُور کر دو اور دیکھو کہ ڈورا توازن میں رہتا ہے یا نہیں -

یہ واضح ہوگا کہ ڈورے کی شکل اور پ اور ک کی قیمتیں قطب م کی وضع پر منحصر ہیں - پس اس مسئلے کے متعدد حل ہو سکتے ہیں -

گیارہویں فصل کی مشقیں

اِن مشقوں کو ترسیماً حل کرنا چاہیئے

(۱) حسب شکل ۱۷۱ ایک سلاخ پر چار قوتیں عمل کرتی ہیں -



اب = ب س = س د = ۱ فٹ ۔ پونڈ وزن میں قدریں حسبِ ذیل ہیں: پ = ۴، ک = ۶، ص = ۵، ف = ۷

شکل ۱۷۱

سمت نما زاویے یہ ہیں :۔

پ ا ب = ۱۱۰°، ک ب س = ۶۰°

ص س د = ۴۵°، ف د س = ۱۲۰°

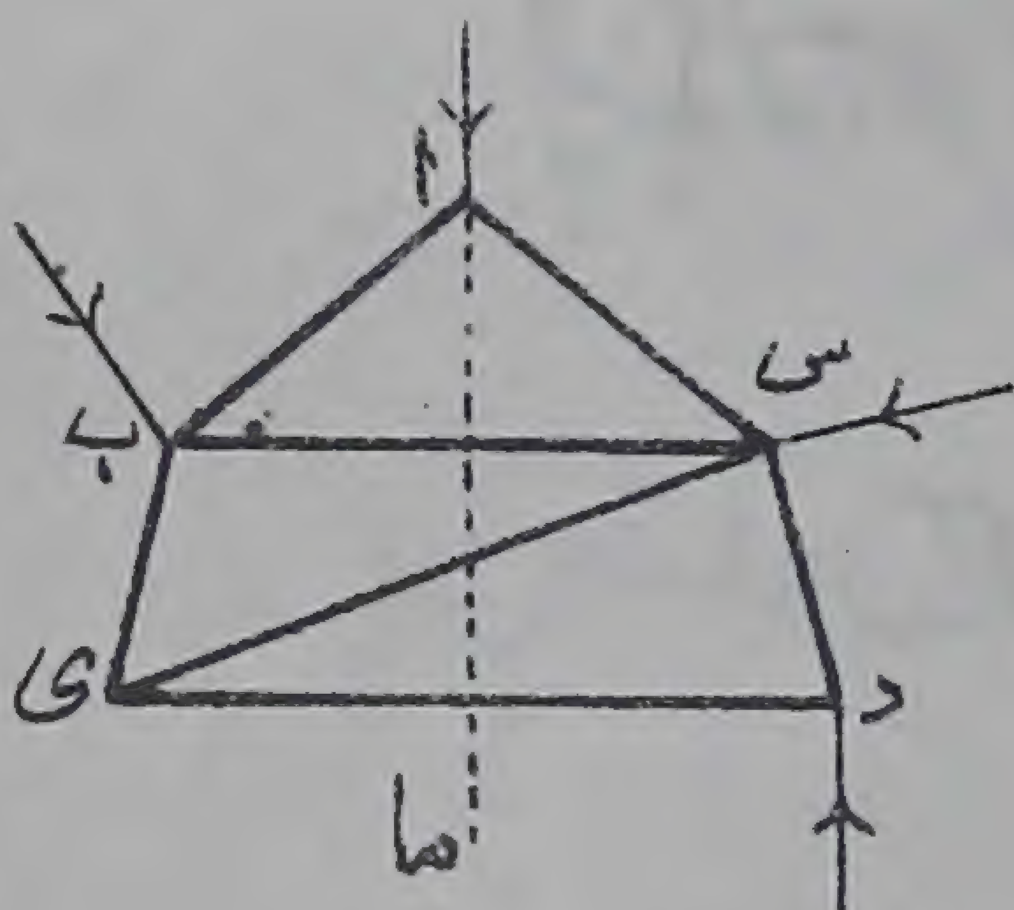
موازن معلوم کرو اور پھر اُس سے قوتوں کے اِس نظام کا حاصل دریافت کرو۔

(۲) ایک جسم پر نیچے کی جانب حسبِ ذیل انتصابی قوتیں عمل کرتی ہیں :۔

پ = ۴۰۰ پونڈ وزن، ک = ۲۰۰ پونڈ وزن، ص = ۶۰۰ پونڈ وزن ت = ۳۰۰ پونڈ وزن ۔ پ اور ک کے درمیان اُفقی فاصلہ = ۲ فٹ، ک اور ص کے درمیان = ۴ فٹ، ص اور ت کے درمیان = ۳ فٹ۔ اِس نظام کا حاصل دریافت کرو۔

(۳) ایک کڑی ا ب ۲۴ فُٹ لمبی اپنے کناروں کے سہارے قائم ہے اور ا سے ۳، ۶، ۱۲ اور ۱۸ فُٹ کے فاصلے سے ۱،۵، ۲، ۳ اور ۴،۵ ٹن وزن کے انتصابی بوجھ اُٹھائے ہوئے ہے ۔ سہاروں کے ردِّ عمل دریافت کرو۔

(۴) شکل ۱۷۲ میں جو قالب دکھایا گیا ہے وہ اُستوار سلاخوں کا بنا ہے جو ملاست کے ساتھ جُڑی ہوئی ہیں ۔ یہ قالب انتصابی خط ا ما کے گرد متشاکل ہے ۔ ا ب = ا س = ۶ فٹ، ب س = ۹ فُٹ، ب ی = س د = ۴ فُٹ، د ی = ۱۱ فٹ ۔ ا پر ۶۰۰ پونڈ

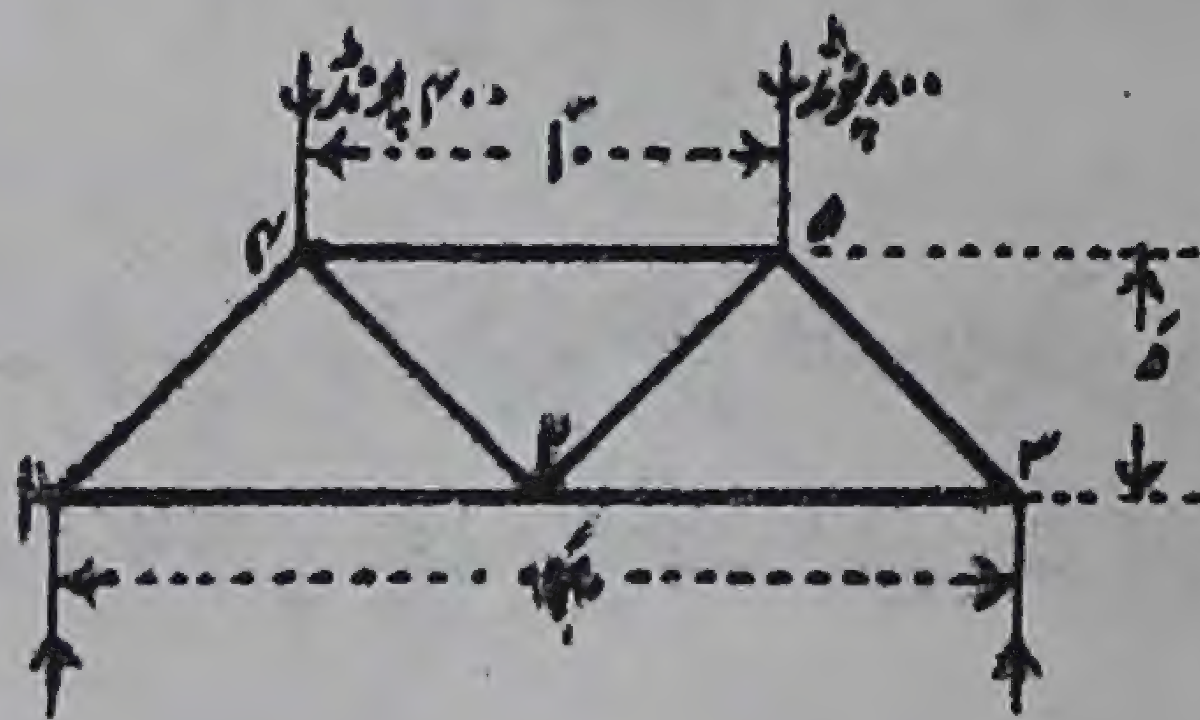


شکل ۱۷۲

وزن کی ایک انتصابی قوت عامل ہے۔ ب پر ب ا سے ۵ر۷ کا زاویہ بناتی ہوئی ۴۰۰ پونڈ وزن کی ایک قوت ہے۔ س پر س د سے °۹۰ کا زاویہ بناتی ہوئی ۸۰۰ پونڈ وزن کی ایک قوت ہے۔ د اور ی پر عمل کرنے والی قوتیں قالب کو سنبھالے ہوئے ہیں۔ د والی قوت انتصابی ہے۔ تو قالب کی تمام سلاخوں کی قوتیں دریافت کرو۔ کھینچ اور ڈھکیل بھی بتاؤ اور قالب کے توازن کے لئے د اور ی پر جو قوتیں درکار ہیں وہ بھی دریافت کرو۔

(۵) ایک ڈورے سے چھ مساوی بوجھ لٹکائے جاتے ہیں۔ ڈورے کے کنارے دو کھونٹیوں ا اور ب سے بندھے ہیں جو ۷ فُٹ کے فصل سے ایک ہی سطح پر واقع ہیں۔ بوجھوں کے خطوطِ عمل کو اُوپر کی طرف بڑھا کر اُفقی خط ا ب سات مساوی حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ ڈورے کا سب سے نیچے کا حصّہ ا ب سے ۳ فٹ نیچے ہے۔ ایک شکل بناؤ جس میں ڈورا دکھاؤ اور اگر ہر بوجھ ۲ پونڈ وزن ہو تو ڈورے کے ہر حصے کا تناؤ دریافت کرو۔

(۶) شکل ۱۷۳ میں جو قالب دکھایا گیا ہے اُس کی تمام سلاخوں کی قوتیں دریافت کرو اور بتاؤ کہ ہر سلاخ کھینچ کے زیرِ عمل ہے یا ڈھکیل کے۔

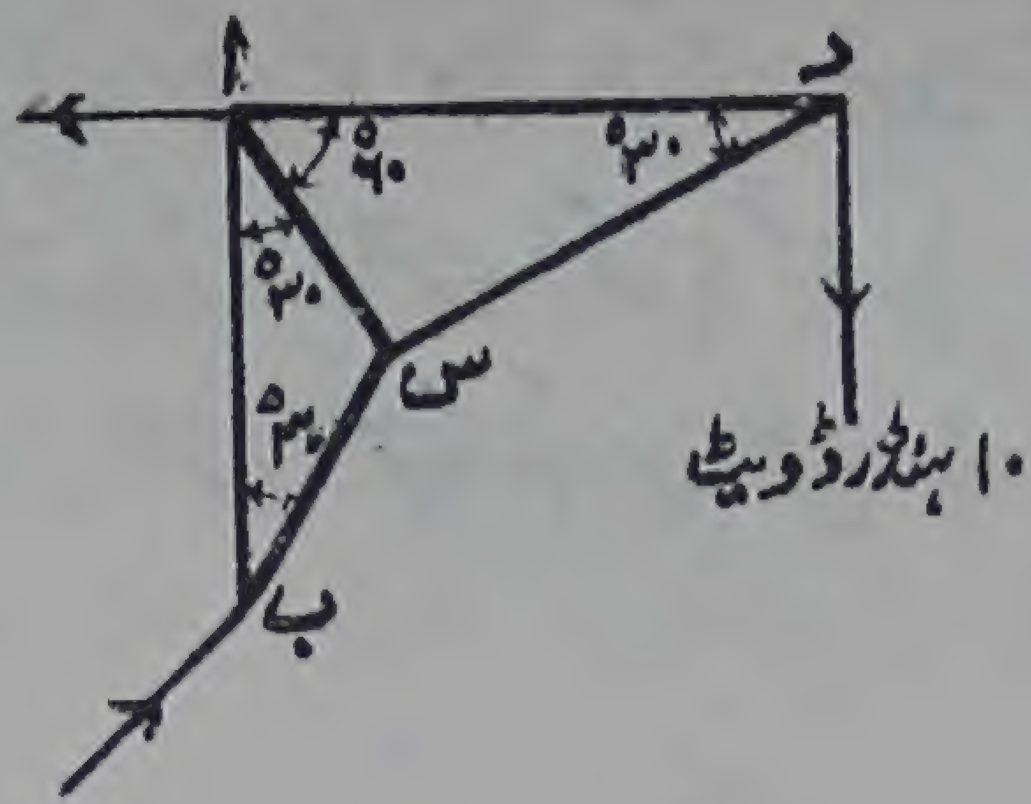


شکل ۱۷۳

(۷) پُوری جسامت کا ایک مستطیل ا ب س د کھینچو جس کے

ضلعے اب = ۴ انچ اور اد = ۳ انچ ہوں ضلعوں اب، س ب، س د اور اد پر علی الترتیب ۴، ۵، ۸، اور ۳ پونڈ وزن کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ۷ پونڈ وزن کی ایک قوت وتر اس پر عمل کرتی ہے۔ قوتوں کی جہتیں حروف کی ترتیب سے ظاہر ہیں۔ حاصل دریافت کرو۔

(۸) شکل ۱۷۴ میں جو خاکا دیا گیا ہے وہ ایک حمالہ ہے جو اب س، د پر ملاست کے ساتھ جُڑی ہوئی سلاخوں سے مرکب ہے۔ حمالہ اپنی وضع میں ا اور ب کے ردِّ عمل سے قائم ہے جن میں سے اوّل الذکر اُفقی ہے۔ د سے ۱۰ ہنڈرڈویٹ کا ایک وزن آویزاں ہے۔ تو ترسیماً یا کسی اور طریقہ سے سلاخوں کے زوروں کو دریافت کرو اور ا اور ب پر ردِّ عمل معلوم کرو۔



شکل ۱۷۴

(۹) بتاؤ کہ ترسیماً قوتی کثیر الاضلاع اور ریسمانی یا ربطی کثیر الاضلاع کی مدد سے ایسی متعدد قوتوں کا حاصل کیسے دریافت کریں گے جن کے خطِ عمل ایک ہی مستوی میں ہوں۔

چار متوازی خطوط ا، ب، س، د کھینچو۔ ان کے درمیانی فاصلے ترتیب وار ۱½، ۱½، ۲ انچ ہیں۔ ان خطوط پر، جو انتصابی مانے گئے ہیں، ہلکی زنجیر سے بنے ہوئے ایک ریسمانی کثیر الاضلاع کی راسیں واقع ہونا ہیں۔ ان راسوں ا، ب، س اور د سے علی الترتیب ۳، ۵، ۷، ۲ پونڈ کے وزن لٹکانا ہیں۔

کثیر الاضلاع کی شکل بناؤ تاکہ ب اور س کے درمیان زنجیر کا حصہ اُفقی رہے۔ اور س اور د کے درمیان والا حصہ اُفقی سے ۶۰° پر مائل رہے۔
[جامعۂ لندن]

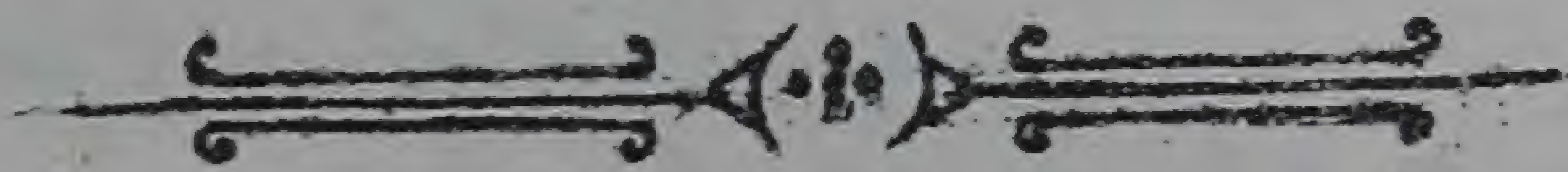
(۱۰) ا ب س ایک مثلث ہے جس میں ب س اُفقی ہے اور ۳۲ فُٹ لمبا ہے اور س ا = ا ب = ۲۴ فُٹ۔ د، ی، ف علی الترتیب ضلعوں ب س، س ا، اور ا ب کے وسطی نقطے ہیں اور ی، ف سے د ملایا گیا ہے۔ شکل ایک چھت قینچی کو ظاہر کرتی ہے۔ جو ب اور س پر قائم ہے اور جو مقامات ب، ف، ا، ی اور س پر علی الترتیب $\frac{1}{2}$، ۱، ۲، ۱ اور $\frac{1}{2}$ ٹن کے انتصابی بوجھوں کے زیرِ عمل ہے۔ تو قینچی کی ہر سلاخ کا زور ترسیماً دریافت کرو۔
[جامعۂ لندن]

(۱۱) سات مساوی ہلکی سلاخیں اِس طرح جوڑ دی گئی ہیں کہ اِن سے دو مربعے ا ب س د اور ا ب ی ف بن جاتے ہیں [دونوں ایک ہی مستوی میں ا ب کے دونوں طرف واقع ہیں] دو اَور ہلکی سلاخیں د ب اور ا ی کو ملاتی ہیں۔ یہ نظام س پر قائم ہے اور ف سے ایک وزن و آویزاں ہے۔ تو ہر سلاخ کا تناؤ یا بچکاؤ دریافت کرو اور اپنے استعمال کردہ طریقے کی تشریح بھی کرو۔

(۱۲) مساوی طول اور علی الترتیب و، وَ وزن کی دو یکساں کڑیاں ا ب اور ا س سرے ا پر جُڑی ہوئی ہیں۔ اور سرے ب اور س اِسی سطح پر دو ثابت نقطوں پر جڑ دیے گئے ہیں۔ کڑیاں انتصابی مستوی میں ساکن ہیں تو قوتی شکل کھینچ کر یا دوسرے طریقے سے ثابت کرو کہ ا کے ردِّ عمل کا انتصابی جزء $\frac{1}{2}$ (و - وَ) ہے اور اُفقی جزء دریافت کرو۔
[جامعۂ لندن]

(۱۳) شکل ۱۶۸ [صفحہ ۲۴۳] میں جو چھت قینچی دکھائی گئی ہے اُس جیسی ایک چھت قینچی میں ابعاد حسبِ ذیل ہیں:-
سہاروں کے درمیان اُفقی فاصلہ ۲۰ فٹ؛ سہاروں کے اُوپر

جوڑ ۴ کی انتصابی بلندی ۵ فُٹ یا سلاخ ۳۶ سہاروں سے ۱ فُٹ اُوپر ہے۔ سلاخیں ۲۳ اور ۵۶ علی الترتیب کڑیوں ۱۴ اور ۷۴ کو علی القوائم تنصیف کرتی ہیں۔ حسبِ ذیل انتصابی بوجھ استعمال ہوتے ہیں:۔ جوڑ ۱ پر ۴۰۰ پونڈ وزن کے جوڑ ۲ پر ۸۰۰ پونڈ وزن کے جوڑ ۴ پر ۱۰۰۰ پونڈ وزن کے جوڑ ۵ پر ۱۲۰۰ پونڈ وزن کے جوڑ ۷ پر ۱۰۰۰ پونڈ وزن۔ سہاروں کے ردِّ عمل انتصابی ہیں۔ اِن کے ردِّ عمل دریافت کرو اور پھر قالب کی ہر سلاخ پر قوتیں معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ قوتیں بھینچ کی ہیں یا کھینچ کی۔



بارہویں فصل

زور - فساد - لچک

زور:- اصطلاح میں **زور** سے مُراد وہ باہمی عمل ہیں جو ایک جسم کی کسی تراش پر ظہور پذیر ہوتے ہیں جب کہ اِس پر قوتوں کا ایک نظام عامل ہو۔ ایسے زور، جن کی وجہ سے جسم کے مختلف حصّے ایک دوسرے سے علیٰحدہ ہونے پر مائل ہوں، یا ایک دوسرے سے قریب ہونا چاہیں یا ایک دُوسرے پر سے پھسلیں، علی الترتیب **تمدیدی زور** یا **کھینچ**، **تغلیظی زور** یا **ڈھکیل** اور **جزئی زور** کہلاتے ہیں۔

اگر تراش کے ہر حصّے کے مساوی رقبوں پر مساوی قوتیں ہوں تو زور **یکساں** کہلاتا ہے، ورنہ زور **متغیر** کہلائیگا۔ زور کی پیمائش قوت فی اِکائی رقبہ سے ہوتی ہے اور اِس کا حساب یوں لگاتے ہیں کہ کُل قوت کو اُس رقبے سے تقسیم کر دیتے ہیں جس پر کہ وہ پھیلی ہوتی ہے۔ اِس حساب کا نتیجہ **حدتِ زور** یا عموماً صرف **زور** کہلاتا ہے۔

متغیر زور کی صورت میں، حساب بالا کا نتیجہ اوسط حدتِ زور کو بتاتا ہے۔ ایسی حالت میں کسی نقطے پر زور کا حساب یوں لگایا جاتا ہے کہ اُس نقطے کو لئے ہوئے ایک بہت ہی چھوٹا رقبہ لیا جاتا ہے اور پھر اِس رقبہ پر جو قوت عمل کرتی ہے اُس کو رقبہ پر تقسیم کر دیا جاتا ہے۔

زور کی مستعملہ اِکائیاں پونڈ یا ٹن وزن، فی مربع اِنچ یا فی مربع فٹ ہیں یس۔ گ۔ ث نظام میں ڈائن[1] فی مربع سنتی میتر زور کی اِکائی ہے۔ کلو گرام وزن فی مربع سنتی میتر عملی میتری اکائی ہے اور ۱۴ء۲۲ پونڈ وزن فی مربع اِنچ کے مُعادِل ہے۔ زور کے ابعاد یہ ہیں:۔

$$\frac{ک\ ط}{و^2} \div ط^2 = \frac{ک}{و^2\ ط}$$

فسادِ یا بگاڑ:۔ اصطلاح میں فساد یا بگاڑ سے مُراد وہ تغیر ہے جو کسی جسم کے ابعاد یا شکل میں پیدا ہو جب کہ اِس پر قوتیں عمل کر رہی ہوں۔ کھینچ یا ڈھکیل کے دَورانِ عمل میں ایک سلاخ بڑی یا چھوٹی ہو جاتی ہے۔ اِس لئے اس میں طولی فساد ہوتا ہے۔ اِس فساد کا حساب یُوں لگاتے ہیں کہ:۔

فرض کرو کہ ل = سلاخ کا اصلی طول

ت = طول کی تبدیلی، دونوں ایک ہی اِکائیوں میں ہونا چاہئیں۔

تو طولی فساد = $\frac{ت}{ل}$

ایک جسم کی تمام سطح پر اگر یکساں عمودی زور [سکونِ سیالاتی زور] عمل کرے تو اُس میں حجمی فساد واقع ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ح = جسم کا اصلی حجم

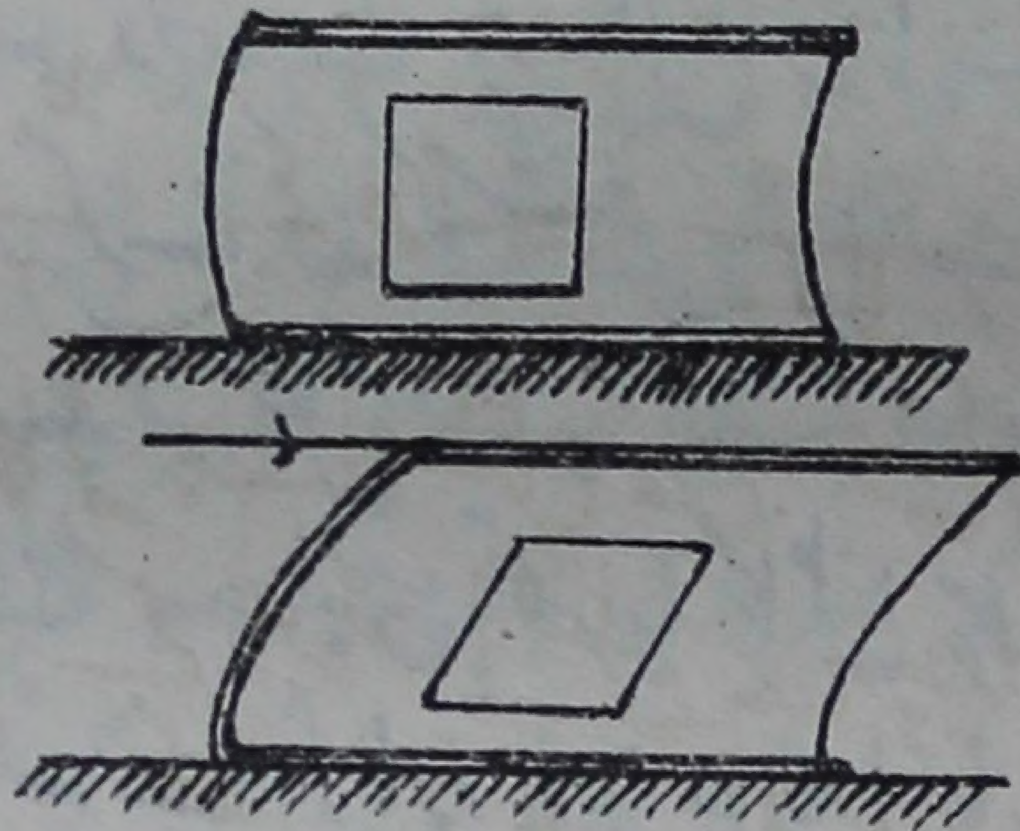
ہ = حجم کی تبدیلی، جب کہ دونوں ایک ہی اکائیوں میں ہوں۔

تو حجمی فساد = $\frac{ہ}{ح}$

جزّی فساد۔ اُس وقت واقع ہوتا ہے جب کہ جسم جزّی زور

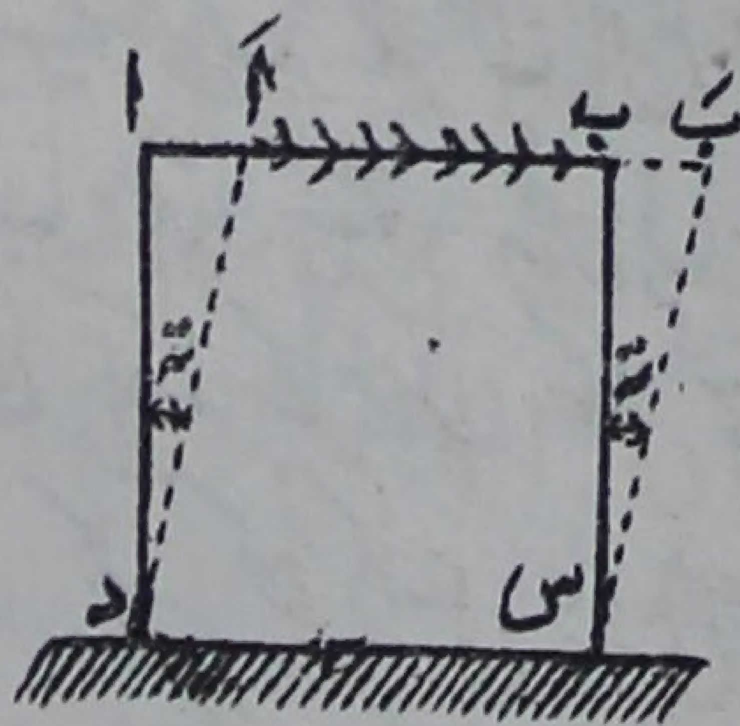
[1] Dyne

کے زیرِ عمل ہو۔ اِس قسم کے فساد میں جسم کی شکل میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔ چنانچہ ایک موٹی کتاب کے ایک پٹھے کو میز پر مضبوط جما دو اور اُوپر کے پٹھے پر جزّی زور لگاؤ [شکل نمبر ۱۷۵]۔ شکل کی تبدیلی یوں ظاہر ہوتی ہے کہ کتاب کے پہلو پر پنسل سے جو مربع



شکل نمبر ۱۷۵۔ جزّی فساد کی مثال

بنایا گیا تھا وہ اب معیّن ہو گیا ہے۔ اِسی طرح کے حالات کے تحت ٹھوس جسم کی بھی یہی کیفیت ہوتی ہے لیکن کم درجے میں [شکل نمبر ۱۷۶]۔ جزّی فساد کی پیمائش نیمقطریوں میں اُس زاویہ ϴ سے ہوتی ہے جس میں شکل نمبر ۱۷۶ کا انتصابی کنارہ جزّی زور کے



شکل نمبر ۱۷۶۔ جزّی فساد

عمل کرنے پر گردش کرتا ہے۔ دھاتوں کے لئے ϴ بہت چھوٹا ہوتا ہے

اور صحت کے لئے یہ لکھنا کافی ہے کہ

جزّی فساد = ت = ب بَ / ب س

واضح ہو کہ فساد کے ابعاد صفر ہوتے ہیں۔

لچک :۔ **لچک** مادّے کی وہ خاصیت ہے جس کی رُو سے ایک جسم جب زور کے زیرِ عمل ہوتا ہے تو وہ اپنی اصلی شکل اور ابعاد پر عود کرنے کی کوشش کرتا ہے، یہ واپسی اُس وقت عمل میں آتی ہے جب کہ مخل قوتیں الگ ہو جاتی ہیں۔ بہت سی قسم کی چیزوں کے لئے یہ واپسی تقریباً کامل ہوتی ہے، بشرطیکہ جسم پر زور کی ایک خاص حد سے زیادہ بوجھ نہ لادا جائے۔ یہ حد مختلف اشیاء کے لئے مختلف ہوتی ہے۔ اگر زور کی اِس حدِ **لچک** سے زیادہ بوجھ لادا جائیگا تو اصل شکل اور ابعاد پر واپسی ناتمام رہیگی۔ اور جسم کی شکل میں اُس وقت ایک **مستقل تبدیلی واقع ہوتی ہے**۔

کلیۂ ہُک[1] :۔ سلاخوں کے کھینچنے یا ڈھکیلنے کے تجربے یہ ظاہر کرتے ہیں کہ طول کی تبدیلی قریب قریب قوتِ عاملہ کے متناسب ہوتی ہے۔ اگر کسی سلاخ کا ایک کنارا مضبوطی سے پکڑ لیا جائے اور دوسرا کنارا مروڑا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ یہ کنارا ثابت کنارے کی اضافت سے جس زاویے میں گردش کرتا ہے وہ عمل کرنے والے مروڑ کے معیارِ اثر کے متناسب ہوتا ہے۔ تجرباتی شہادت اِس امر کا پتا دیتی ہے کہ کڑیوں کا انصراف اور کمانیوں کا کھنچاؤ عمل کرنے والے بوجھوں کے متناسب ہوتا ہے۔ اِس کلیہ کو ہُک نے دریافت کیا تھا اور وہ اُسی کے نام سے موسوم ہے۔ چونکہ ہر صورت میں زور بوجھ کے متناسب ہوتا ہے اور فساد بُعد کی تبدیلی کے متناسب ہوتا ہے اِس لئے کُلیۂ ہُک کو یوں بیان کر سکتے ہیں:۔ فساد اپنے پیدا کرنے والے

[1] Hooke

زوروں کے متناسب ہوتے ہیں۔

زور کی ایک خاص حد تک بہت سی اشیاء کلیۃً ہُک کی متابعت کرتی ہیں۔ اِس حد کے بعد ایسے فساد پیدا ہو جاتے ہیں جو چھوٹے زوروں کے فسادوں سے متناسباً کہیں زیادہ ہوتے ہیں۔ متمدد اشیاء، مثلاً کمایا ہُوا لوہا جن کے تار کھینچے جا سکتے ہیں، جو بیلی جا سکتی اور جو موڑی جا سکتی ہیں جب اِس حالت پر پہنچتی ہیں کہ کلیۂ ہُک اِن کے لئے ساقط ہونے لگتا ہے تو اِن میں ایک حالت شروع ہوتی ہے۔ جب یہ حالت پُوری طور سے ظہور پذیر ہوتی ہے تو زور میں کسی معتدبہ اضافے کے بغیر فساد بہت زیادہ واقع ہوتا ہے۔ جس زور پر فساد میں اِس قدر بڑا اضافہ ہوتا ہے، اُس کو نقطۂ مغلوبیت کہتے ہیں۔ اور وہ اُس زور سے بہت زیادہ ہوتا ہے جس پر کلیۂ ہُک ساقط ہوتا ہے۔

تجربے سے اِس زور کو دریافت کرنا جس پر کسی جسم کی شکل میں پہلی مرتبہ مستقل تبدیلی واقع ہوتی ہے، دقت طلب امر ہے اور جب اصطلاح "لچک کی حد" استعمال کی جاتی ہے تو اُس سے عموماً وہ زور مُراد ہوتا ہے جس پر کلیۂ ہُک ساقط ہو جاتا ہے۔ اِس زور کو تجربے سے دریافت کر لینا آسان ہے۔

لچک کا معیار یا مقیاس:- یہ مان کر کہ ایک دی ہوئی شئے کلیۂ ہُک کی متابعت کرتی ہے فرض کرو کہ ص ایک فساد ہے جو ایک دیے ہوئے زور پ سے پیدا ہُوا ہے تو

ص ∝ پ یا ا ص = پ

$$ا = \frac{پ}{ص} \quad \text{--------------} \quad (1)$$

جہاں ا شئے زیرِ غور کے لئے ایک مستقل ہے جس کو لچک کا معیار کہتے ہیں۔ لچک کے معیار کی قیمت شئے کی قسم اور زورِ عامل کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے۔ لچک کے معیار کی تین خاص

قسمیں ہیں :-

ینگ کا معیار ایسی سلاخ سے متعلق ہوتا ہے جس کو ایک طرف سے کھینچتے یا دباتے ہیں اور وہ سلاخ کے طول سے ۹۰° پر مائل ایک تراشِ عمودی پر عامل زور کو طولی فساد پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ

پ = سلاخ پر عمل کرنے والی کھینچ یا دھکیل، قوت کی اکائیوں میں

ر = تراشِ عمودی کا رقبہ

ل = سلاخ کی اصلی لمبائی

ت = سلاخ کے طول میں تبدیلی

تو اگر ینگ کے معیار کے لئے ی لکھیں تو

$$ی = \frac{زور}{فساد} = \frac{پ}{ر} \div \frac{ت}{ل} = \frac{پ\,ل}{ر\,ت} \quad ----(۲)$$

جحمی معیار یا مقیاس ایسے جسم سے متعلق ہوتا ہے جس کی تمام سطح پر ایک یکساں عمودی زور عمل کرتا ہو۔

فرض کرو کہ

ب = حدّتِ زور

ح = جسم کا اصلی حجم

ہ = حجم کی تبدیلی

تو جحمی مقیاس کے لئے ک لکھنے پر

$$ک = \frac{زور}{جحمی\ فساد} = ب \div \frac{ہ}{ح} = \frac{ب\,ح}{ہ} \quad \text{حاصل ہوا} \ (۳)$$

اُستواری معیار یا مقیاس اُس جسم سے متعلق ہوتا ہے جس پر جزّی زور عمل کرتا ہو۔

فرض کرو کہ ش = جزّی زور کی حدّت

ثہ = جزّی فساد